

BDA016 Stavební mechanika 2

4. přednáška

- Metody řešení staticky neurčitých konstrukcí
- Stupeň statické neurčitosti
- Princip silové metody

doc. Ing. Hana Šimonová, Ph.D. (hana.simonova@vut.cz)

U **staticky neurčitých prutových konstrukcí** nelze reakce vnějších a vnitřních vazeb určit pouze ze statických podmínek rovnováhy, ale je nutno použít i **podmínek deformačních**

Metody řešení staticky neurčitých konstrukcí

SILOVÁ METODA

- neznámé staticky neurčité veličiny (síly a momenty)
- pro jejich řešení se sestaví deformační podmínky
- metoda přímá – výsledkem jsou statické veličiny (reakce a vnitřní síly)

DEFORMAČNÍ METODA

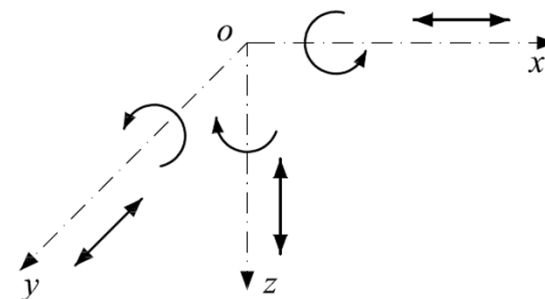
- neznámé přetvárně (deformačně) neurčité veličiny (posunutí a potočení průřezů a styčníků)
- pro jejich řešení se sestaví statické podmínky rovnováhy
- metoda nepřímá – řeší deformační stav, z kterého odvozuje stav statický

Počet **stupňů volnosti** m = počet **nezávislých složek deformace** (posunů a pootočení), které může těleso vykonat

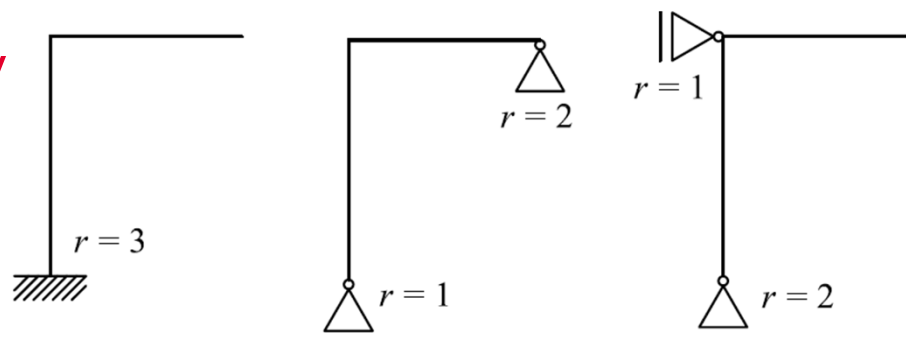
- tuhé těleso v **prostoru**: $m = 6$
- tuhé těleso v **rovině**: $m = 3$ (u , w , φ)

Pomocí **vazeb** r je třeba zabránit pohybu

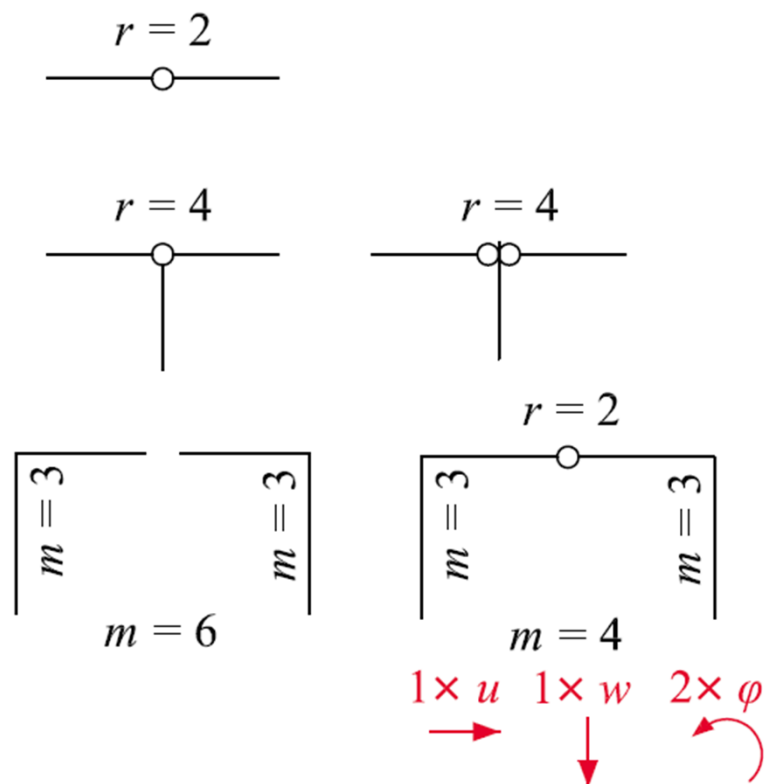
- **vnější** vazby r_{ext} – podpory
- **vnitřní** vazby r_{int} – klouby, táhla, kyvné pruty



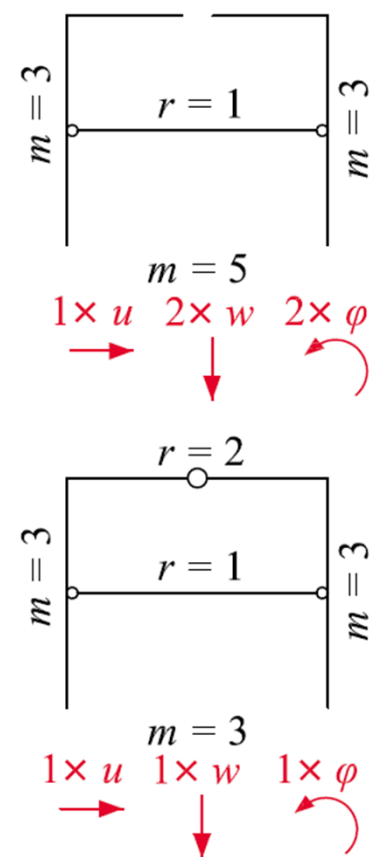
podpory



klouby



táhla, kyvné pruty

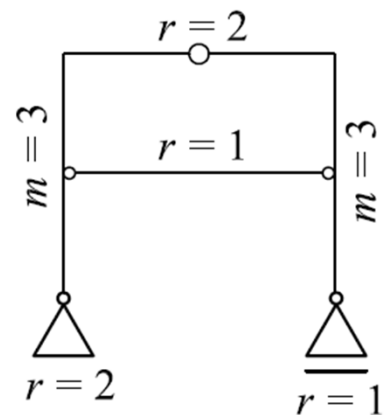


celkový (konstrukce skládající se z dílčích částí)

- $n_s = r - m$

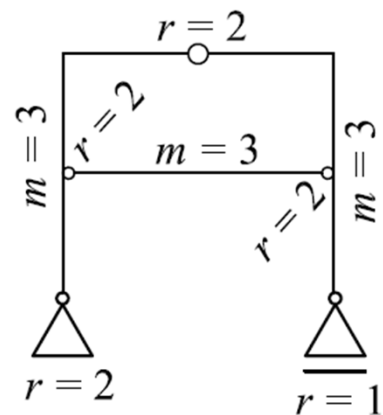
vnější (konstrukce jako celek)

- $n_{s,ext} = r_{ext} - m_{ext}$ ($m_{ext} = 3$ – rovina)



$$n_s = r - m = 6 - 6 = 0$$

$$n_{s,ext} = r_{ext} - m_{ext} = 3 - 3 = 0$$



$$n_s = r - m = 9 - 9 = 0$$

- $n_s = 3u - p_k + (a - 3)$

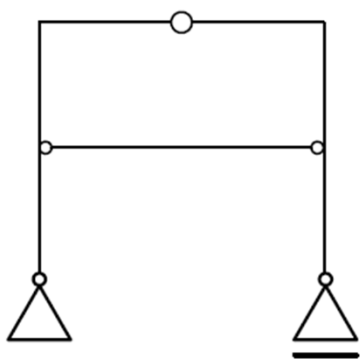
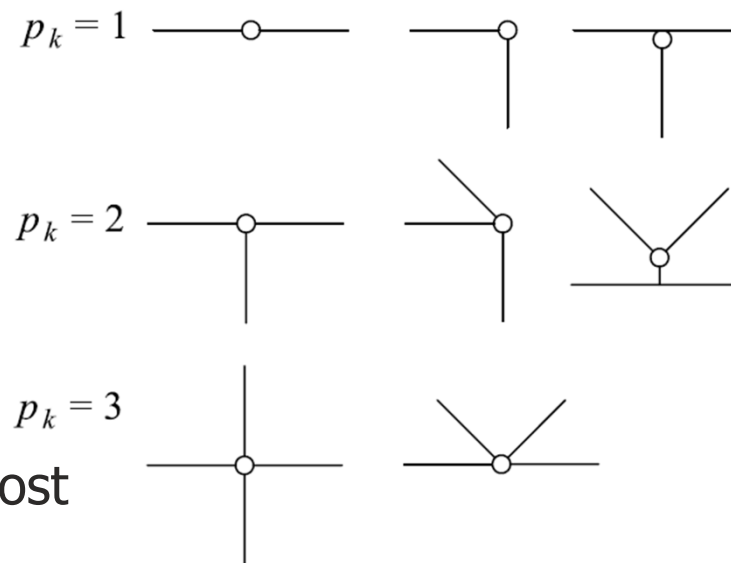
u – počet uzavřených celků

p_k – počet jednoduchých kloubů

a – počet vnějších vazeb (r_{ext})

- $n_{s,int} = 3u - p_k$ – vnitřní statická neurčitost

- $n_{s,ext} = a - 3$ – vnější statická neurčitost



$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

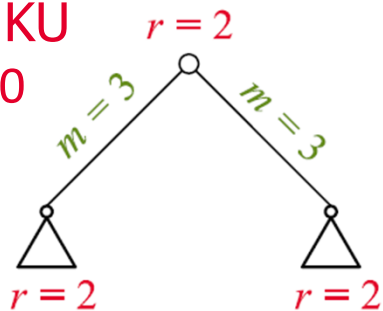
$$n_s = 3 \cdot 1 - (3 \cdot 1) + (3 - 3) = 0$$

Statická a kinematická určitost v závislosti na stupni statické neurčitosti

- $n_s = 0$ – konstrukce je **staticky a kinematicky určitá**
- $n_s > 0$ – konstrukce je **staticky neurčitá a kinematicky přeúčtá**
- $n_s < 0$ – konstrukce je **staticky přeúčtá a kinematicky neurčitá** (pohyblivý mechanismus)

SÚ, KÚ

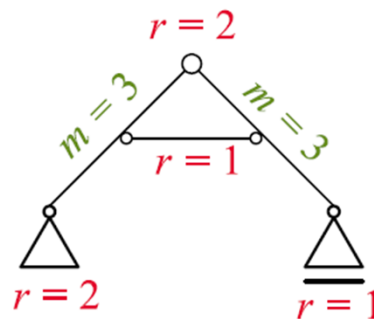
$$n_s = 0$$



$$n_s = r - m = 6 - 6 = 0$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

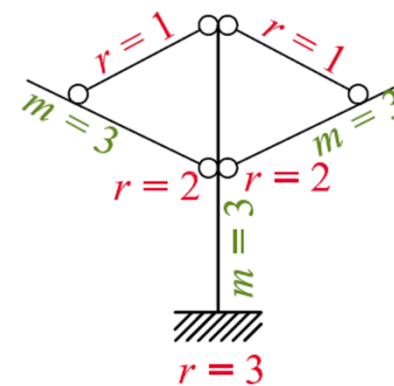
$$n_s = 3 \cdot 0 - 1 + (4 - 3) = 0$$



$$n_s = r - m = 6 - 6 = 0$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

$$n_s = 3 \cdot 1 - (3 \cdot 1) + (3 - 3) = 0$$

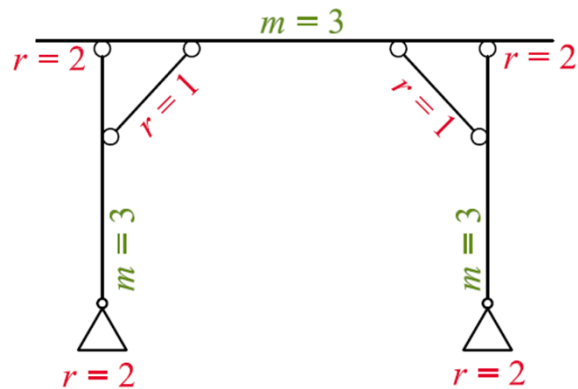


$$n_s = r - m = 9 - 9 = 0$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

$$n_s = 3 \cdot 2 - (6 \cdot 1) + (3 - 3) = 0$$

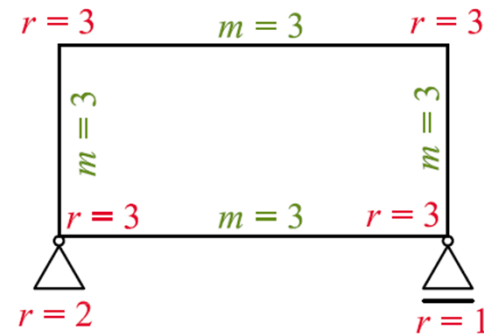
SN, KP
 $n_s > 0$



$$n_s = r - m = 10 - 9 = 1$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

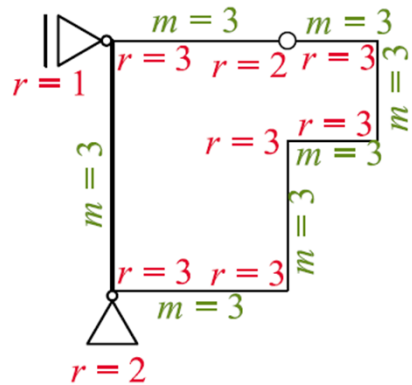
$$n_s = 3 \cdot 2 - (6 \cdot 1) + (4 - 3) = 1$$



$$n_s = r - m = 15 - 12 = 3$$

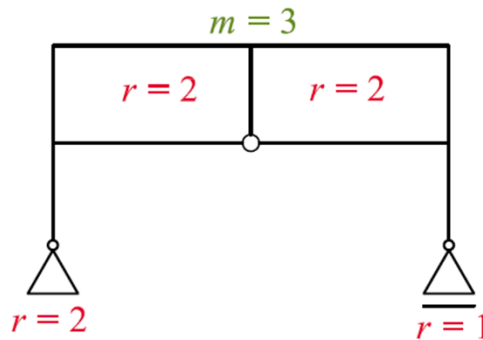
$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

$$n_s = 3 \cdot 1 - 0 + (3 - 3) = 3$$



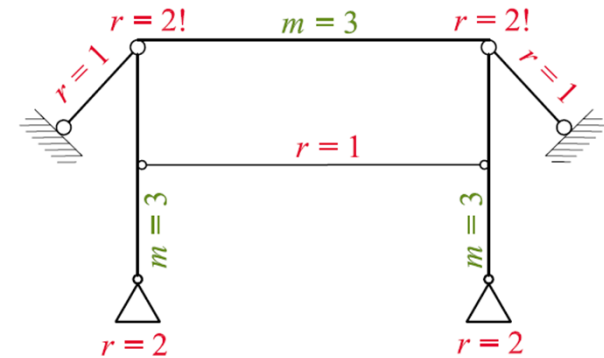
$$n_s = r - m = 23 - 21 = 2$$

$$n_s = 3 \cdot 1 - 1 + (3 - 3) = 2$$



$$n_s = r - m = 7 - 3 = 4$$

$$n_s = 3 \cdot 2 - 2 + (3 - 3) = 4$$



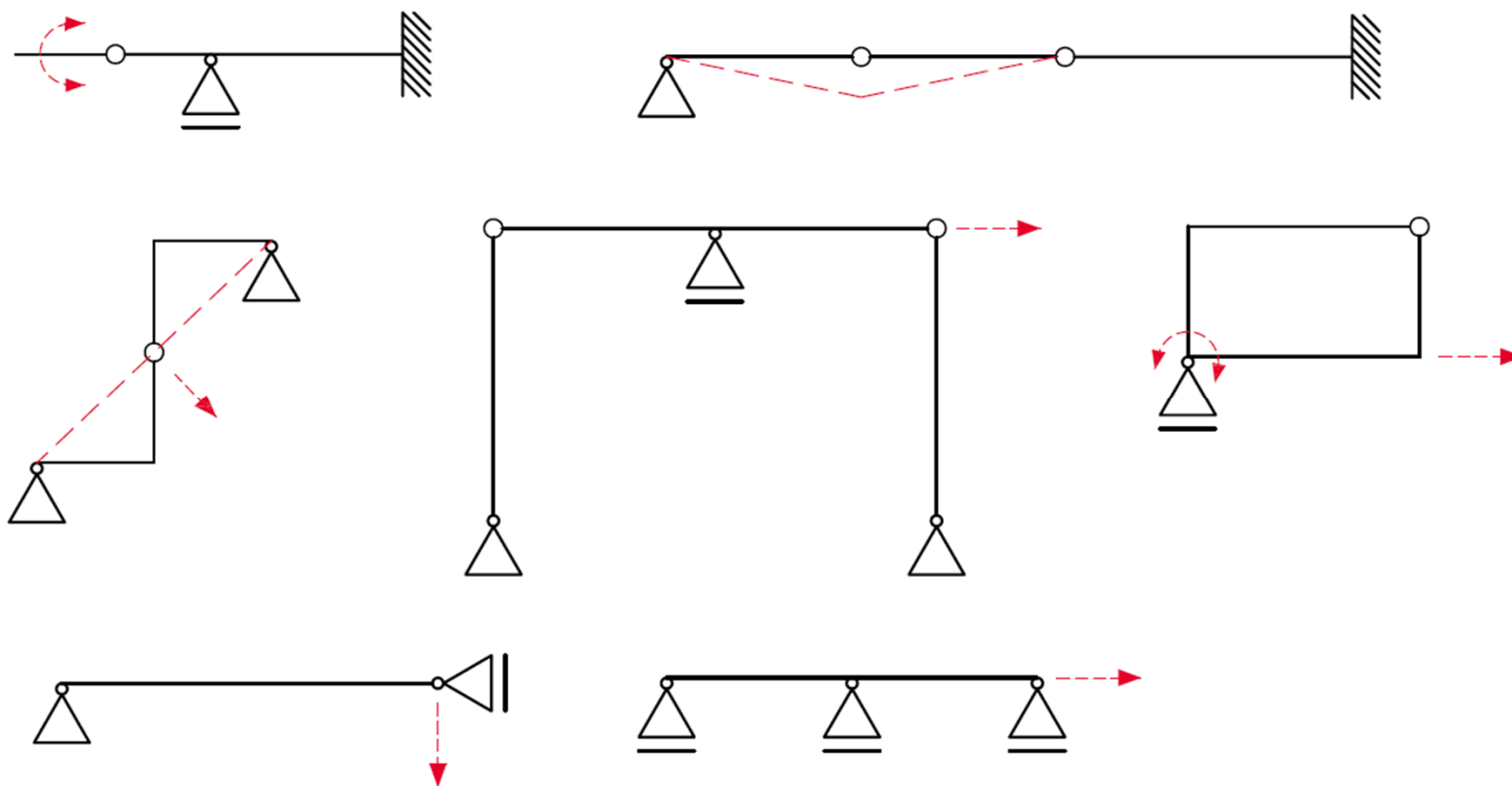
$$n_s = r - m = 11 - 9 = 2$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

$$n_s = 3 \cdot 1 - (4 \cdot 1) + (6 - 3) = 2$$

Výjimkové případy podepření – vazby **nejsou vhodně uspořádány**, aby zabránily pohybu konstrukce nebo její části

SÚ
 $n_s = 0$

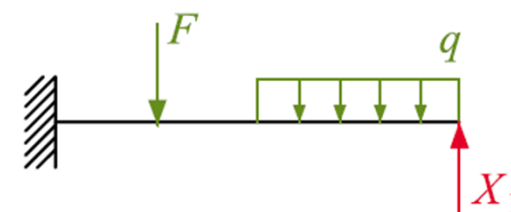
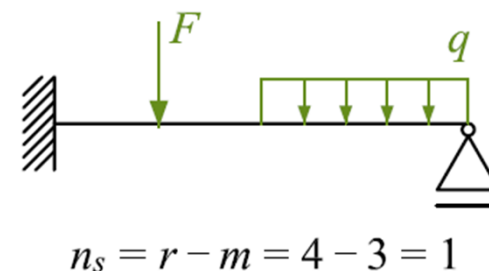


Při výpočtu **silovou metodou** jsou využívány:

- podmínky rovnováhy
- deformační podmínky
- principy úměrnosti a superpozice

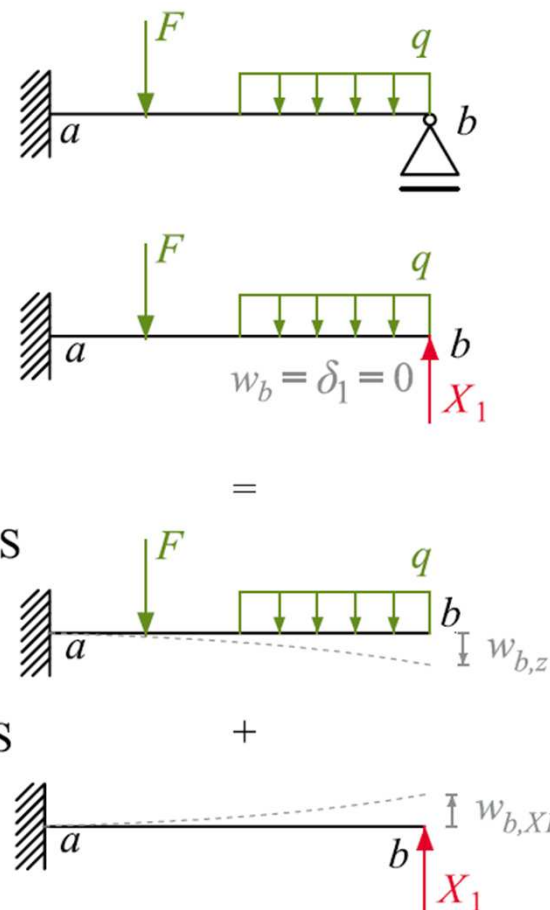
Postup řešení:

1. stanovení **stupně statické neurčitosti** n_s
2. vytvoření **základní staticky určité soustavy** odstraněním n_s **vazeb** (vnějších a/nebo vnitřních)
!pozor na výjimečné případy podepření!
3. odebrané vazby se **nahradí** odpovídajícími **složkami reakcí** (vnější vazby) nebo **interakcí** (vnitřní vazby)
– staticky neurčité veličiny X_i ($i = 1, \dots, n_s$), smysl volíme libovolně

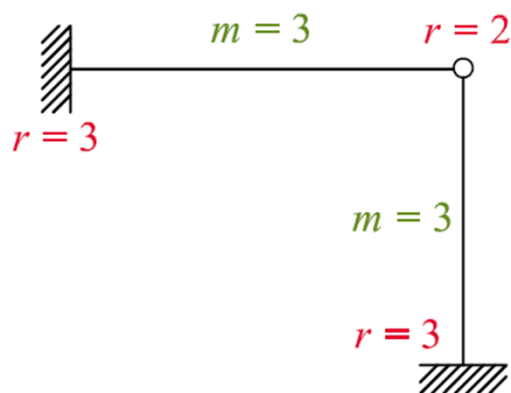


Postup řešení:

4. musí platit, že deformace základní soustavy je shodná s deformací původní konstrukce → sestaví se systém **n_s deformačních podmínek**, soustava lineárních rovnic
5. každou deformaci **δ_i** lze vyjádřit jako funkci daného zatížení a jednotlivých staticky neurčitých veličin **X_i** → využití principu superpozice
 $w_b = \delta_1 = 0$
 $w_b = w_{b,z} + w_{b,X_1} = \delta_{1,0} + \delta_{1,1} = 0$
6. ze **statických podmínek rovnováhy** se na základní soustavě vyřeší **zbývající složky reakcí** a dále **průběhy vnitřních sil**



volba **základní staticky a kinematicky určité soustavy** odebráním n_s vazeb

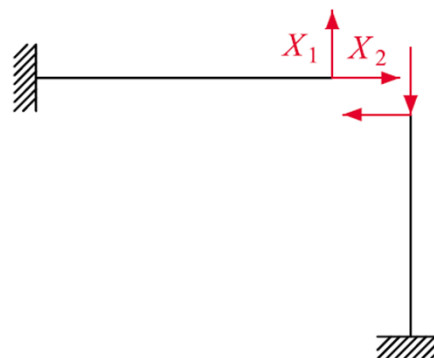
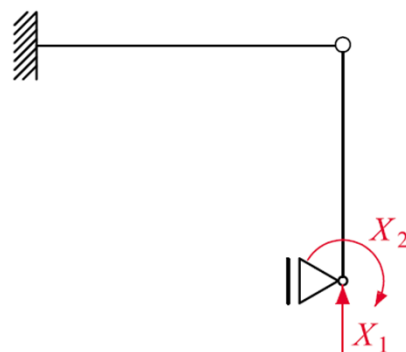
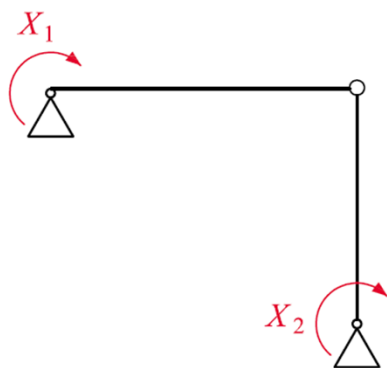


$$n_s = r - m = 6 - 6 = 0$$

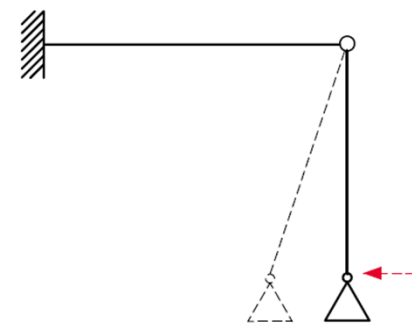
$$n_{s,ext} = r_{ext} - m_{ext} = 6 - 3 = 3$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

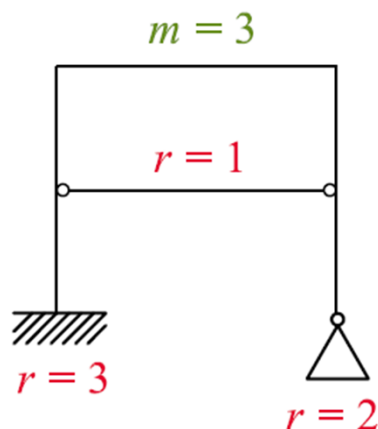
$$n_s = 3 \cdot 0 - 1 + (6 - 3) = 2$$



výjimečný případ



volba **základní staticky a kinematicky určité soustavy** odebráním n_s vazeb

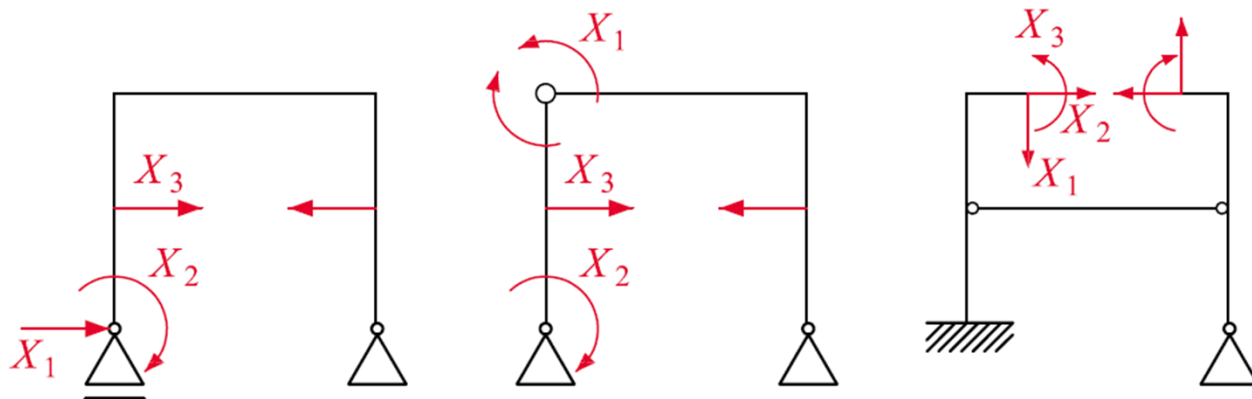


$$n_s = r - m = 6 - 3 = 3$$

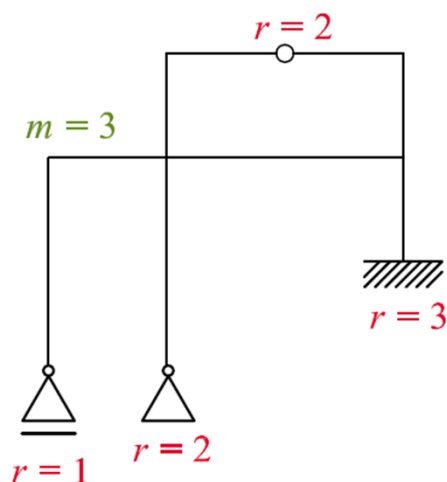
$$n_{s,ext} = r_{ext} - m_{ext} = 5 - 3 = 2$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

$$n_s = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + (5 - 3) = 3$$



volba **základní staticky a kinematicky určité soustavy** odebráním n_s vazeb

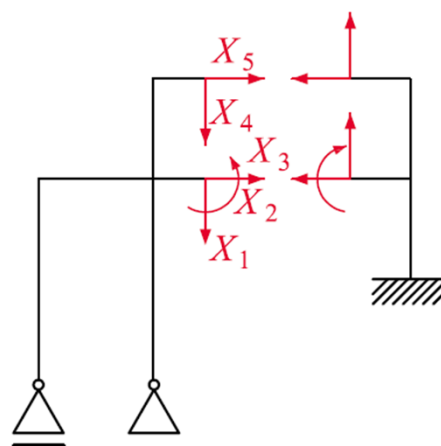
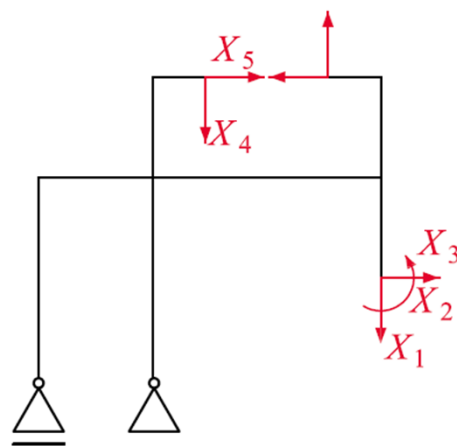


$$n_s = r - m = 8 - 3 = 5$$

$$n_{s,ext} = r_{ext} - m_{ext} = 6 - 3 = 3$$

$$n_s = 3u - p_k + (a - 3)$$

$$n_s = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + (6 - 3) = 5$$



1. stupeň statické neurčitosti

$$n_s = 6 - 3 = 3$$

2. volba základní soustavy

odebrání 3 vazeb $\rightarrow$ prostý nosník
3 staticky neurčité veličiny

$$X_1 = M_a$$

$$X_2 = M_b$$

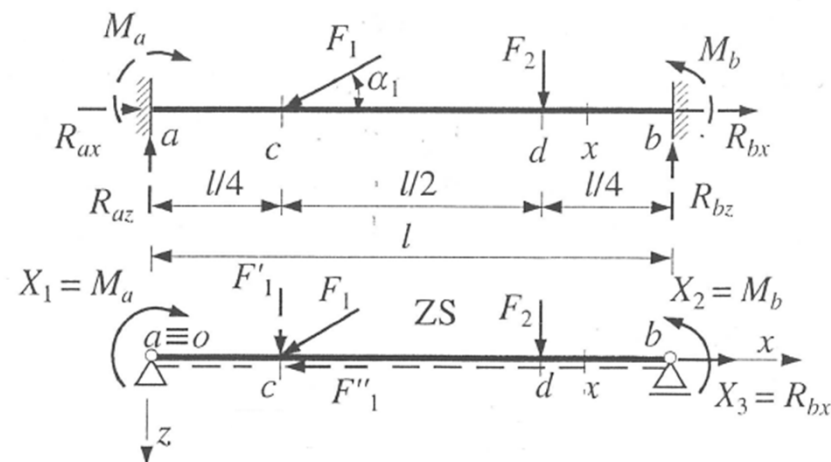
$$X_3 = R_{bx}$$

3. deformační podmínky

$$1) \quad \Phi_{ab} = 0$$

$$2) \quad \Phi_{ba} = 0$$

$$3) \quad u_b = 0$$



4. určení podporových momentů

$$\Phi_{ab} = \varphi_{ab} + M_a \cdot \alpha_{ab} + M_b \cdot \beta_{ab} = 0$$

$$\Phi_{ba} = \varphi_{ba} + M_a \cdot \beta_{ba} + M_b \cdot \alpha_{ba} = 0$$

z Mawellovy věty platí

$$\beta_{ab} = \beta_{ba} = \beta; \alpha_{ab} = \alpha_{ba} = \alpha$$

řešením soustavy 2 rovnic

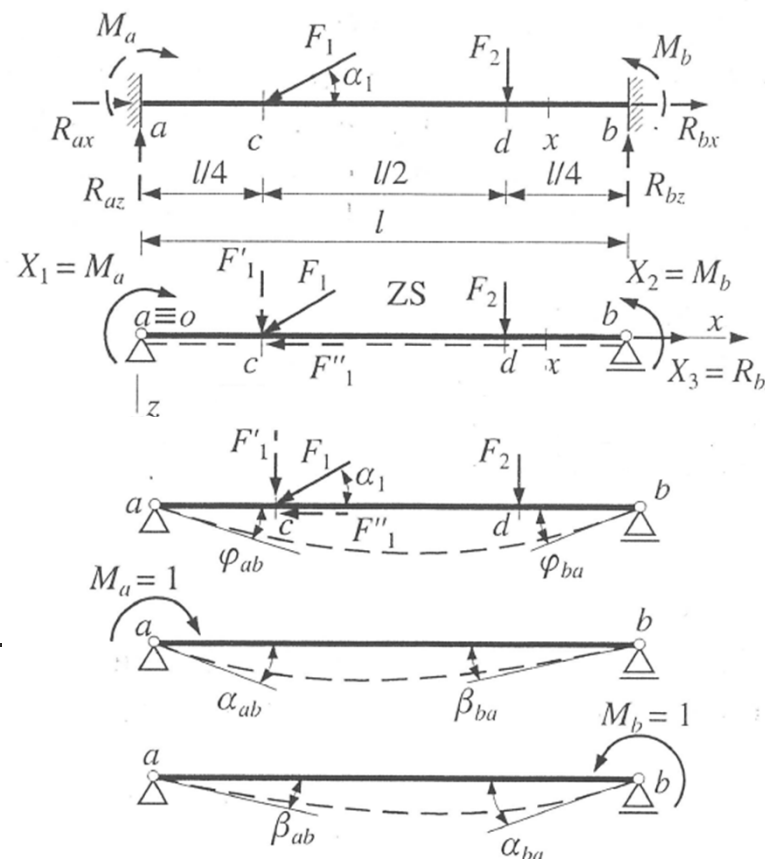
$$M_a = \frac{\varphi_{ba}\beta - \varphi_{ab}\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}; M_b = \frac{\varphi_{ab}\beta - \varphi_{ba}\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}$$

nosník konstantního průřezu

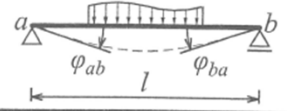
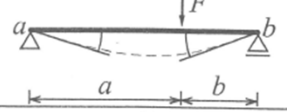
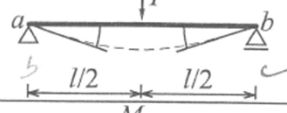
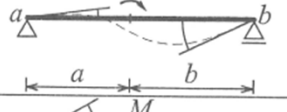
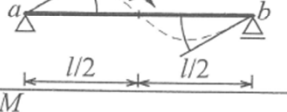
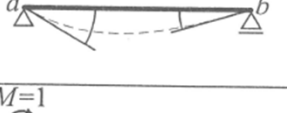
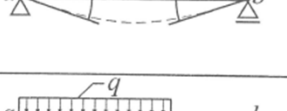
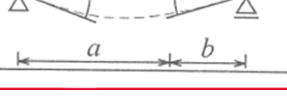
$$\alpha = \frac{l}{3EI}; \beta = \frac{l}{6EI}$$

základní deformační úhly prostého nosníku

$$\rightarrow M_a = -\frac{2EI}{l}(2\varphi_{ab} - \varphi_{ba}); M_b = -\frac{2EI}{l}(2\varphi_{ba} - \varphi_{ab})$$



Pootočení prostého nosníku konstantní ohybové tuhosti

Pootočení φ_{ab} podporového průřezu a		Pootočení φ_{ba} podporového průřezu b
$\varphi_{ab}^F = \frac{1}{6} \frac{F}{EI} \frac{ab}{l} (l+b)$ (5.8a)		$\varphi_{ba}^F = \frac{1}{6} \frac{F}{EI} \frac{ab}{l} (l+a)$ (5.8b)
$\varphi_{ab}^F = \frac{1}{16} \frac{F}{EI} l^2$ (5.9a)		$\varphi_{ba}^F = \frac{1}{16} \frac{F}{EI} l^2$ (5.9b)
$\varphi_{ab}^M = -\frac{1}{6} \frac{M}{EI} \frac{1}{l} (l^2 - 3b^2)$ (5.10a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{6} \frac{M}{EI} \frac{1}{l} (l^2 - 3a^2)$ (5.10b)
$\varphi_{ab}^M = -\frac{1}{24} \frac{M}{EI} l$ (5.11a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{24} \frac{M}{EI} l$ (5.11b)
$\varphi_{ab}^M = \frac{1}{3} \frac{M}{EI} l$ (5.12a)		$\varphi_{ba}^M = \frac{1}{6} \frac{M}{EI} l$ (5.12b)
$\alpha_{ab} = \frac{1}{3} \frac{l}{EI}$ (5.13a)		$\beta_{ba} = \frac{1}{6} \frac{l}{EI}$ (5.13b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} l^3$ (5.14a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} l^3$ (5.14b)
$\varphi_{ab}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (2l-a)^2$ (5.15a)		$\varphi_{ba}^q = \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \frac{a^2}{l} (2l^2 - a^2)$ (5.15b)

5. určení vodorovného posunu

$$u_b = \delta_0 + \delta_1 \cdot R_{bx} = 0$$

δ_0 – posunutí od skutečného zatížení

δ_1 – posunutí od jednotkového zatížení

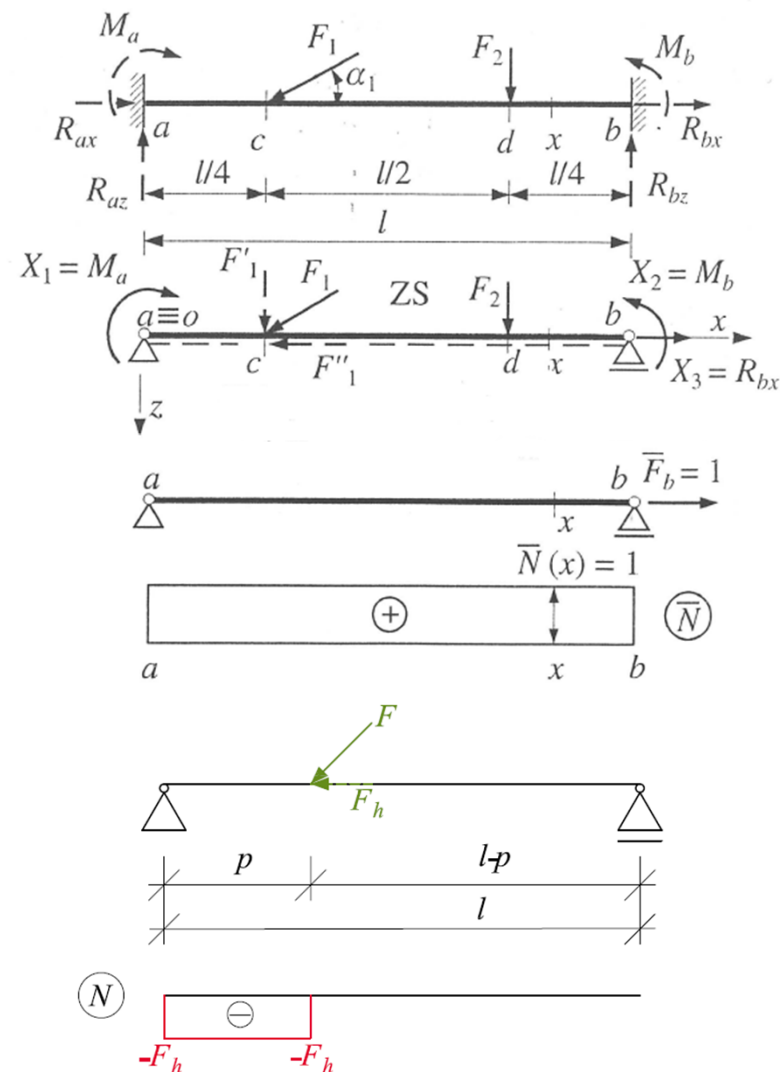
nosník konstantního průřezu $EA = \text{konst}$

$$\delta_0 = \int_0^l \frac{N(x)\bar{N}(x)}{EA(x)} dx = \frac{1}{EA} \int_0^l N(x) dx = \frac{A_N}{EA}$$

$$\delta_1 = \int_0^l \frac{\bar{N}(x)\bar{N}(x)}{EA(x)} dx = \frac{1}{EA} \int_0^l 1 dx = \frac{l}{EA}$$

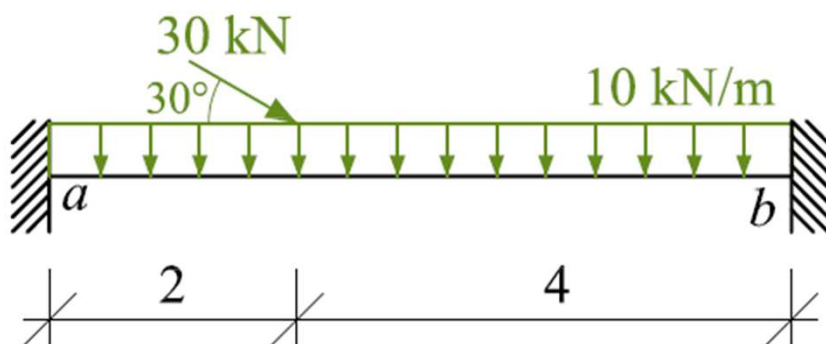
$$R_{bx} = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{\int_0^l N(x) dx}{l} = -\frac{A_N}{l}$$

$$R_{bx} = -\frac{-F_h \cdot p}{l} = \frac{F_h \cdot p}{l}$$



Na dané konstrukci pomocí silové metody vykreslete průběhy vnitřních sil.

Uvažujte konstantní ohybovou tuhost.



FAST SILOVÁ METODA

$$n_s = 6 - 3 = 3$$

$$\Phi_{ab} = \varphi_{ab} + M_a \cdot \alpha_{ab} + M_b \cdot \beta_{ab} = 0$$

$$\Phi_{ba} = \varphi_{ba} + M_a \cdot \beta_{ba} + M_b \cdot \alpha_{ba} = 0$$

$$M_a = \frac{\varphi_{ba}\beta - \varphi_{ab}\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}; M_b = \frac{\varphi_{ab}\beta - \varphi_{ba}\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}$$

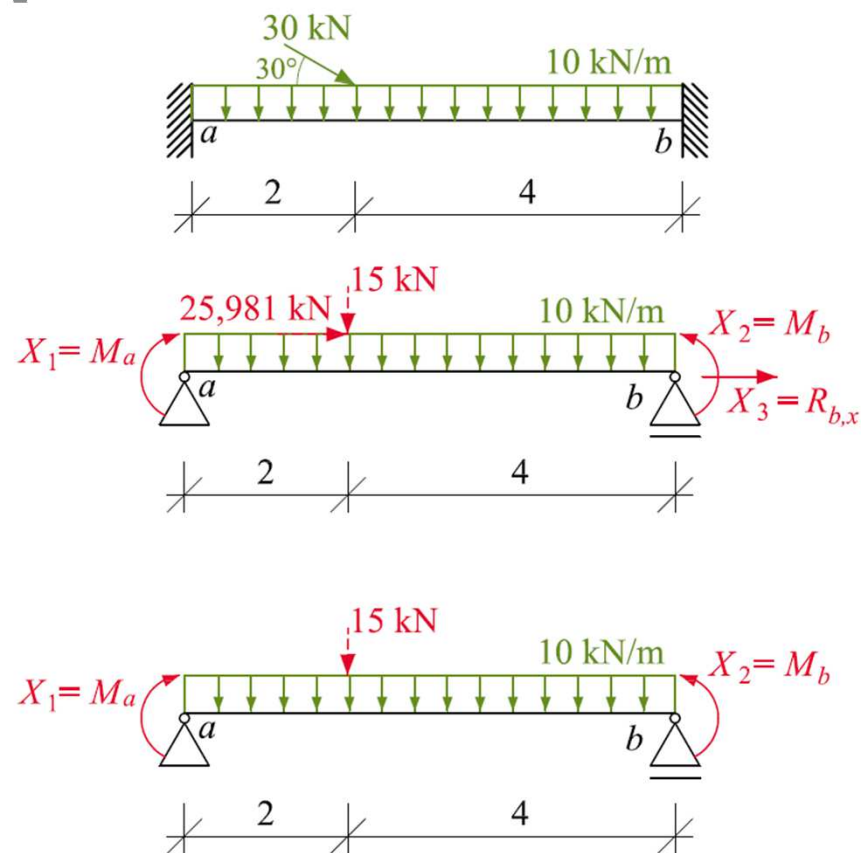
$$\alpha = \frac{l}{3EI} = \frac{6}{3EI} = \frac{2}{EI}; \beta = \frac{l}{6EI} = \frac{6}{6EI} = \frac{1}{EI}$$

$$\varphi_{ab} = \varphi_{ab,F} + \varphi_{ab,q} = \frac{123,3 \cdot 10^3}{EI}$$

$$\varphi_{ab,F} = \frac{F \cdot a \cdot b}{6EI \cdot l} (l + b) = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4}{6EI \cdot 6} (6 + 4) \rightarrow$$

$$\varphi_{ab,F} = \frac{33,3 \cdot 10^3}{EI}$$

$$\varphi_{ab,q} = \frac{q \cdot l^3}{24EI} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{24EI} = \frac{90 \cdot 10^3}{EI}$$



FAST SILOVÁ METODA

$$\varphi_{ba} = \varphi_{ba,F} + \varphi_{ba,q} = \frac{116,6 \cdot 10^3}{EI}$$

$$\varphi_{ba,F} = \frac{F \cdot a \cdot b}{6EI \cdot l} (l + a) = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4}{6EI \cdot 6} (6 + 2) \rightarrow$$

$$\varphi_{ba,F} = \frac{26,6 \cdot 10^3}{EI}$$

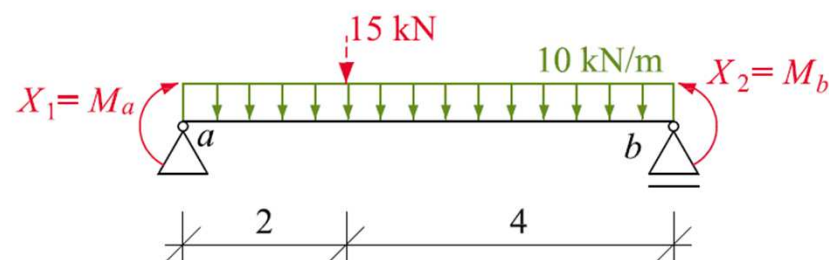
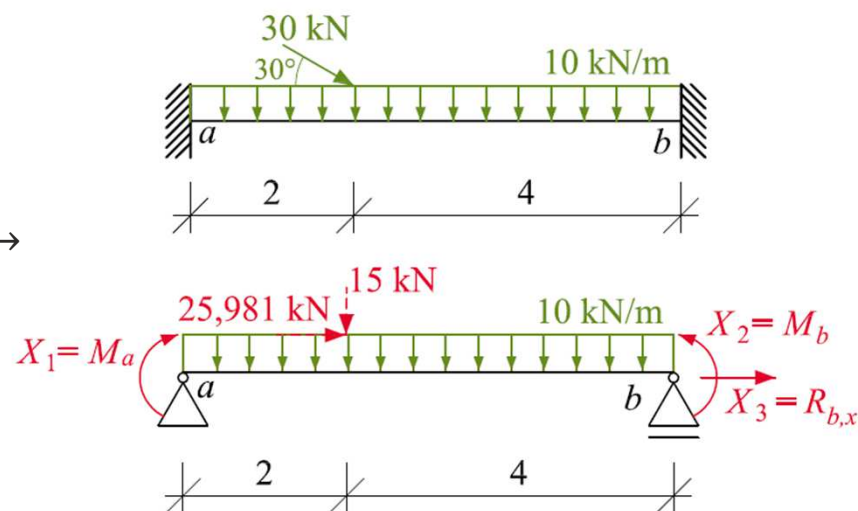
$$\varphi_{ba,q} = \frac{q \cdot l^3}{24EI} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{24E} = \frac{90 \cdot 10^3}{EI}$$

$$M_a = \frac{\varphi_{ba}\beta - \varphi_{ab}\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}; M_b = \frac{\varphi_{ab}\beta - \varphi_{ba}\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\rightarrow M_a = -\frac{2EI}{l} (2\varphi_{ab} - \varphi_{ba})$$

$$M_a = -\frac{2EI}{6} \left(2 \cdot \frac{123,3 \cdot 10^3}{EI} - \frac{116,6 \cdot 10^3}{EI} \right) = -43,3 \cdot 10^3 \text{ Nm} = -43,3 \text{ kNm}$$

$$M_b = -\frac{2EI}{l} (2\varphi_{ba} - \varphi_{ab}) = -\frac{2EI}{6} \left(2 \cdot \frac{116,6 \cdot 10^3}{EI} - \frac{123,3 \cdot 10^3}{EI} \right) = -36,6 \text{ kNm}$$



FAST SILOVÁ METODA

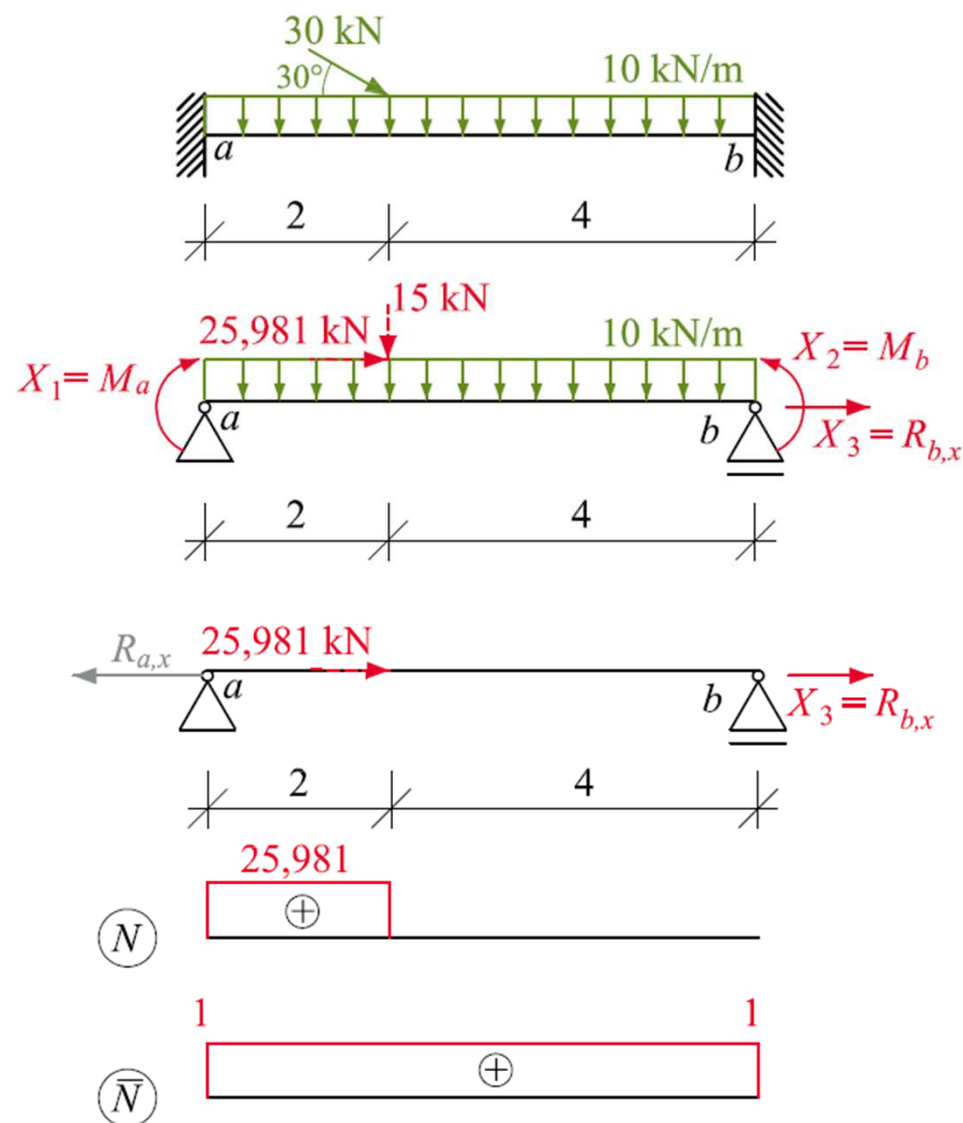
$$u_b = \delta_0 + \delta_1 \cdot R_{bx} = 0$$

$$R_{b,x} = -\frac{\delta_0}{\delta_1} = -\frac{\int_0^l N(x) dx}{l} = -\frac{A_N}{l}$$

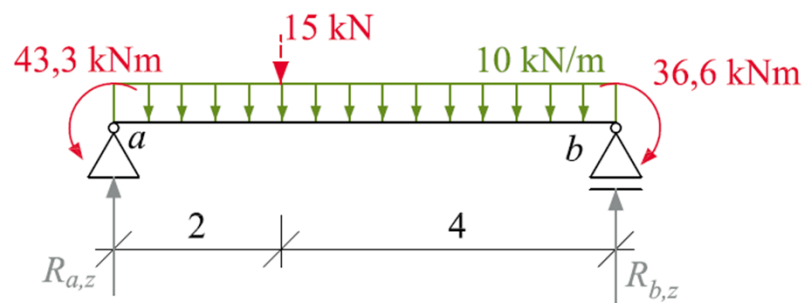
$$R_{b,x} = -\frac{25,981 \cdot 10^3 \cdot 2}{6} = -8,66 \text{ kN}$$

$$\sum F_{i,x} = 0: -R_{a,x} + 25,981 + R_{b,x} = 0$$

$$\rightarrow R_{a,x} = 17,321 \text{ kN}$$

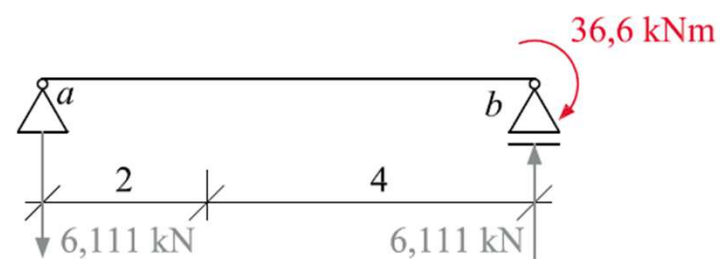
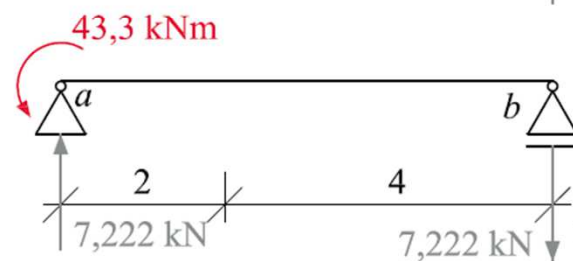
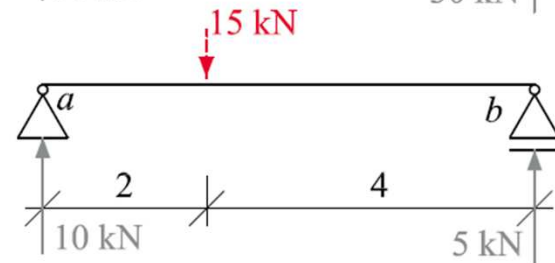
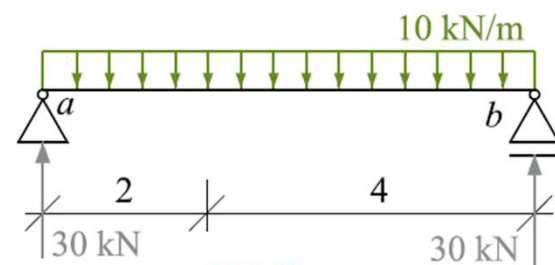


FAST SILOVÁ METODA



$$R_{a,z} = 30 + 10 + 7,2 - 6,1 = 41,1 \text{ kN}$$

$$R_{b,z} = 30 + 5 - 7,2 + 6,1 = 33,8 \text{ kN}$$



FAST SILOVÁ METODA

