Návodné příklady, CD06 & CD04

rok 2013/2014, verze 1 Jan Eliáš

Pravděpodobnost a matematické statistika

A. 1 Distribuční funkce náhodné veličiny X je pro libovlné $x < 1$ rovna 0. Jaká je hodnota rozdělovací funkce této veličiny v bodě -1?

[0]

A. 2 Rozdělovací funkce náhodné veličiny X je pro libovlné $x > 5$ rovna 0. Jaká je hodnota distribuční funkce této veličiny v bodě 10?

[1]

A. 3 Je možné, aby hodnota rozdělovací funkce (hustoty pravděpodobnosti) veličiny X v bodě 1 byla rovna -0.2 ($f(1) = -0.2$)?

[ne]

A. 4 Je možné, aby hodnota distribuční funkce veličiny X v bodě 3 byla rovna 0.5 ($F(3) = 0.5$) a v bodě 4 rovna 0.4 ($F(4) = 0.4$)?

[ne]

A. 5 Veličina T má trojúhelníkové rozdělení ohraničené body $t = 1$ a $t = 6$. Mimo tuto oblast je rozdělovací funkce T nulová. Uvnitř je rozdělovací funkce lineární s minimem 0 v bodě $t = 1$ a maximem k v bodě $t = 6$. Jaká je hodnota parametru k?

[2/5]

A. 6 Jaká je hodnota distribuční funkce veličiny T z předchozího příkladu v bodě $t = 3.5$?

[1/4]

A. 7 Jaká je střední hodnota veličiny T z příkladu A. 5?

[13/3]

Analytické metody

B. 1 Určete přímým výpočtem pravděpodobnost poruchy při rezervě spolehlivosti $Z = X - Y$, kde veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 3, 8\rangle$ a veličina Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 2, 5\rangle$. Veličiny X a Y jsou nezávislé.

[2/15]

Aproximační metody

C. 1 Jaký je Cornellův index spolehlivosti v případě, že rezerva spolehlivosti Z má střední hodnotu μ_Z =0.25 a směrodatnou odchylku σ_Z =0.1?

[2.5]

C. 2 Jaká hodnota Cornellova indexu spolehlivosti odpovídá pravděpodobnosti poruchy 0.0001?

[-3.72]

C. 3 Nakreslete graf závislosti pravděpodobnosti poruchy p_f na Cornellově indexu spolehlivosti β_c. Pro osu p_f volte logaritmické měřítko.

C. 4 X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mu_X = 3$, $\sigma_X = 3$, $\mu_Y = -2.5$, $\sigma_Y = 4$. Rezerva spolehlivosti je vyjádřena rovnicí $Z = X - Y + 1$? Určete Cornellův index spolehlivosti β_c a příslušnou pravděpodobnost poruchy.

[β_c = 1.3, p_f = 0.0968]

C. 5 Veličina X s normálním rozdělením $N(10, 2)$ je transformována na veličinu U se standardizovaným normálním rozdělením $N(0, 1)$. Jedná se o isopravdě- podobnostní transformaci, tedy takovou, která ja založena na shodě hodnoty distribuční funkce vzoru i obrazu $x \to u : F_X(x) = F_U(u)$. Na jakou hodnotu u se zobrazí vzor $x = 8$?

[-1]

C. 6 Při hledání pravděpodobnosti poruchy p_f byla použita metoda FORM. Všechny vstupní veličiny X, Y i Z byly transformovány na standardizované normální nezávislé veličiny U_X, U_Y a U_Z. Ve standardizovaném prostoru byl nalezen návrhový bod P^* o souřadnicích $[u_X, u_Y, u_Z] = [-1, -2, 2]$. Jaká je hodnota indexu spolehlivosti podle Hasofera a Linda?

[3]

C. 7 X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mu_X = 6$, $\sigma_X = 3$, $\mu_Y = 3$, $\sigma_Y = 2$. Rezerva spolehlivosti je vyjádřena rovnicí $Z = X^2 + 2X - 3Y$? Určete index spolehlivosti podle Hasofera a Linda a příslušnou pravděpodobnost poruchy.

[P^* =[-1.15, 0.434], β = 1.23, p_f = 0.1095]

Simulační metody

D. 1 Odhadněte pravděpodobnost poruchy podle rezervy spolehlivosti $Z = X^2 - Y$ simulační metodou z vygenerovaných pěti realizací vstupních veličin $[x_i, y_i] = [3.1, 9.2], [3, 8.5], [3.2, 9.3], [2.9, 8.7], [3, 8.9]$.

[1/5]

D. 2 Kolik realizací je přibližně potřeba na odhad pravděpodobnosti poruchy $p_f = 0.0001$ metodou Monte Carlo tak, aby variační koeficient výsledku byl přibližně 5%?

[4 milióny]

D. 3 Pomocí metody Monte Carlo vygenerujte 100 realizací náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením od 3 do 5. Ověřte přibližnou shodu průměrné hodnoty a směrodatné odchylky vygenerovaných čísel s očekávanou hodnotou.

[$\mu \approx 4$, $\sigma \approx 1/3$]

D. 4 Pomocí metody Latine Hypercube Sampling vygenerujte 100 realizací náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(5, 2)$. Ověřte přibližnou shodu průměrné hodnoty a směrodatné odchylky vygenerovaných čísel se vstupními parametry normálního rozdělení.

D. 5 Ověřte metodou Monte Carlo výsledek z příkladu C. 4.

D. 6 Určete přesnější hodnotu pravděpodobnosti poruchy z příkladu C. 7 pomocí metody Monte Carlo.

[$p_f \approx$ 0.102]

Citlivostní analýza

E. 1 Graficky či odhadem seřaďte vstupní veličiny A, B a C podle jejich absolutního vlivu na rezervu spolehlivosti Z použitím výsledků metody Monte Carlo v tabulce.

i	a	b	c	z
1	4.0	9.5	8.1	23.5
2	8.5	3.6	5.6	16.7
3	11.5	9.9	2.3	6.0
4	6.8	12.3	4.5	13.1
5	13.2	3.2	3.2	9.3

[C - A - B]

E. 2 Odhad z předchozího příkladu ověřte výpočtem Pearsonova korelačního koeficientu mezi rezervou spolehlivosti a vstupními veličinami.

[$\rho(A, Z) = -0.872$; $\rho(B, Z) = 0.0493$; $\rho(C, Z) = 0.999$]