

Aproximace pevnosti svazku křehkých vláken

Václav Sadílek

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky

21. května 2015



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpora tvorby excelentních týmů mezioborového výzkumu na VUT, CZ.1.07/2.3.00/30.0005

Osnova

1. Motivace
2. Distribuční funkce pevnosti
3. Implementace
4. Databáze
5. Aproximace
6. Závěr

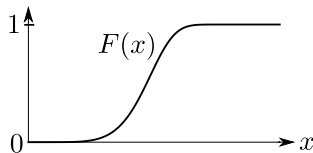
Motivace

- ▶ využití známého vztahu pro výpočet distribuční funkce pevnosti svazku z křehkých vláken [Daniels, 45]
- ▶ navržení aproximace, která by umožnila získat hodnoty distribuční funkce bez nutnosti časově náročného výpočtu rekurze
- ▶ zlepšení aproximace směrodatné odchylky pevnosti svazku vláken

Svazek ze 3 křehkých vláken

- po porušení jednoho vlákna se zatížení rovnoměrně rozdělí na zbývajících vlákna

$$\begin{aligned}
 & \text{————— } F(x) \\
 G_3(\sigma) = & \\
 & \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} \sigma \\ \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow \sigma \end{array} F(\sigma)^3 + \\
 & \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} \sigma \\ \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow \sigma \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} 3\sigma \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow 3\sigma \end{array} 3F(\sigma)^2 [F(3\sigma) - F(\sigma)] + \\
 & \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} \sigma \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow \sigma \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} \frac{3}{2}\sigma \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow \frac{3}{2}\sigma \end{array} 3F(\sigma) [F(\frac{3}{2}\sigma) - F(\sigma)]^2 + \\
 & \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} \sigma \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow \sigma \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} \frac{3}{2}\sigma \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow \frac{3}{2}\sigma \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \begin{array}{c} 3\sigma \\ \text{---} \times \text{---} \end{array} \rightarrow 3\sigma \end{array} \\
 & 6F(\sigma) [F(\frac{3}{2}\sigma) - F(\sigma)] [F(3\sigma) - F(\frac{3}{2}\sigma)] \\
 & \text{zatížení / vlákno}
 \end{aligned}$$



Pevnost svazku křehkých vláken

- ▶ distribuční funkce pevnosti svazku křehkých vláken (rekurzivní vztah)

$$G_n(x) = P(Q_n^* \leq x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} [F(x)]^k G_{n-k}\left(\frac{nx}{n-k}\right),$$

$$\text{kde } G_1(x) \equiv F(x), G_0(x) \equiv 1 \text{ a } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

- ▶ distribuční funkce pevnosti jednoho vlákna má Weibullovo rozdělení

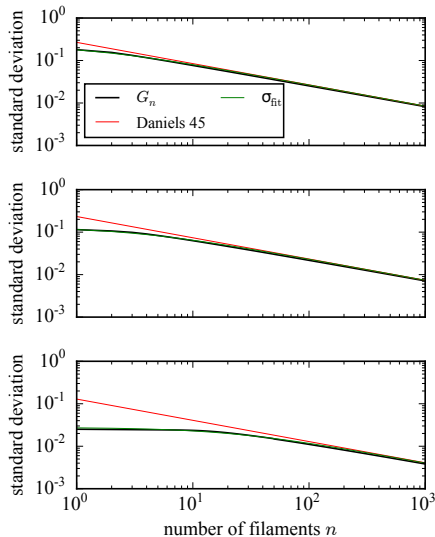
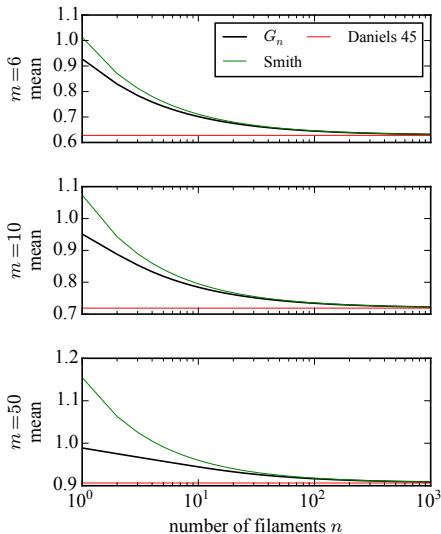
$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{s}\right)^m\right]$$

- ▶ aproximace pomocí normálního rozdělení $N(\mu_S, \sigma_D)$ pro $n \rightarrow \infty$

$$\mu_S = m^{\frac{-1}{m}} s \cdot c + n^{\frac{-2}{3}} s \cdot m^{-\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{3}\right)} e^{\frac{-1}{3m}} 0.996$$

$$\sigma_D = m^{\frac{-1}{m}} s \sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}, \quad c = e^{\frac{-1}{m}}$$

Pevnost svazku křehkých vláken

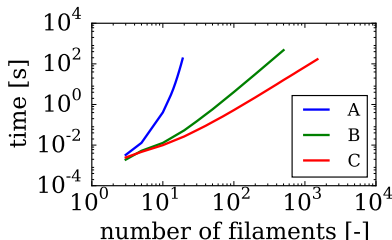
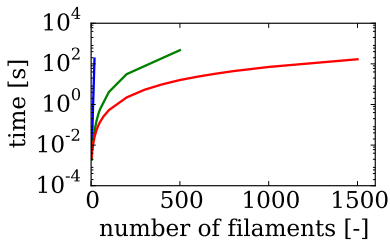


Implementace

- ▶ programovací jazyk Python
- ▶ `numpy` balík pro práci s numerickými daty
- ▶ `mpmath` knihovna pro výpočty s rozšířenou přesností čísel
- ▶ použito 1000 desetinných míst (3325 bits)

Implementace

- A** rekurze – nejbližší k matematické definici ($2^n - 1$ volání, např. $n = 50 \Rightarrow 10^{15}$ volání)
- B** rekurze s ukládáním (memoization) – uložené výsledky jsou opětovně použity ($\frac{(n-2)^2(n-1)}{2} - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{3}$ přístupů, např. $n = 50 \Rightarrow 19600$)
- C** implementace pomocí cyklů a ukládání



Implementace

n_f	A	B	C
50	8094 let	0.58 s	0.12 s
1000	$2.5 \cdot 10^{284}$ let	1 h	70 s
1500	—	3.5 h	167 s

[Dell T7610, 2x Intel Xeon E5-2687w, 192 GB, Kubuntu 14.04]

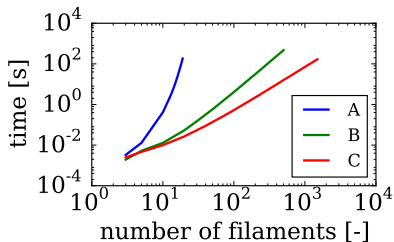
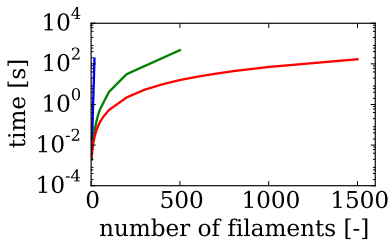


Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k}\left(x \frac{n}{n-k}\right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k}\left(x \frac{n}{n-k}\right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n
 $x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$
- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} & & & \\ B_{2,1} & B_{2,2} & & \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} \end{bmatrix}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 & B_{2,2} & & \\ B_{3,1} F_3^1 & B_{3,2} & B_{3,3} & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} \end{bmatrix}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 & B_{3,2} F_3^2 & B_{3,3} & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 & B_{4,3} & B_{4,4} \end{bmatrix}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 & B_{3,2} F_3^2 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 & B_{4,3} F_4^3 & B_{4,4} \end{bmatrix}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 & B_{3,2} F_3^2 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 & B_{4,3} F_4^3 & B_{4,4} F_4^4 \end{bmatrix}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n
 $x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$
- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$S_1 = \sum \begin{bmatrix} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 & B_{3,2} F_3^2 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 & B_{4,3} F_4^3 & B_{4,4} F_4^4 \end{bmatrix}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$S_1 = \sum \begin{bmatrix} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 S_1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 & B_{3,2} F_3^2 S_1 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 & B_{4,3} F_4^3 S_1 & B_{4,4} F_4^4 \end{bmatrix}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n
 $x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$
- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \left[\begin{array}{cccc} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 S_1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 & B_{3,2} F_3^2 S_1 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 & B_{4,3} F_4^3 S_1 & B_{4,4} F_4^4 \end{array} \right] \\ S_2 &= \sum \end{aligned}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \left[\begin{array}{cccc} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 S_1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 S_2 & B_{3,2} F_3^2 S_1 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 S_2 & B_{4,3} F_4^3 S_1 & B_{4,4} F_4^4 \end{array} \right] \\ S_2 &= \sum \end{aligned}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n
 $x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$
- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \left[\begin{array}{cccc} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 S_1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 S_2 & B_{3,2} F_3^2 S_1 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 & B_{4,2} F_4^2 S_2 & B_{4,3} F_4^3 S_1 & B_{4,4} F_4^4 \end{array} \right] \\ S_2 &= \sum \\ S_3 &= \sum \end{aligned}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \left[\begin{array}{cccc} B_{1,1} F_1^1 & & & \\ B_{2,1} F_2^1 S_1 & B_{2,2} F_2^2 & & \\ B_{3,1} F_3^1 S_2 & B_{3,2} F_3^2 S_1 & B_{3,3} F_3^3 & \\ B_{4,1} F_4^1 S_3 & B_{4,2} F_4^2 S_2 & B_{4,3} F_4^3 S_1 & B_{4,4} F_4^4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Diagram implementace

- rekurzivní vztah rozdělen do tří částí

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{(-1)^{k+1} \binom{n}{k}}_{B_{i,k}} \underbrace{[F(x)]^k}_{F_i} \underbrace{G_{n-k} \left(x \frac{n}{n-k} \right)}_{S_i}$$

- počet unikátních x_i a F_i je n

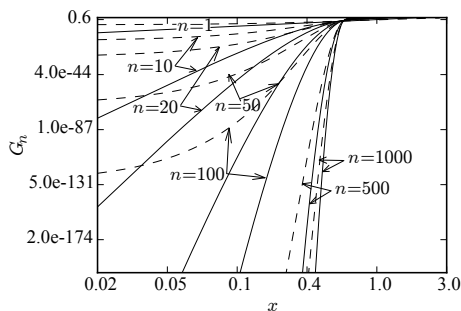
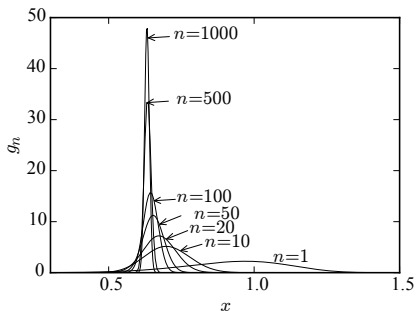
$$x_i = x \frac{n}{i}, \quad F_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- 2D pole – číslo sloupce k (modrá), číslo řádku i (červená)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum \left[\begin{array}{c} B_{1,1} F_1^1 \end{array} \right] \\ S_2 &= \sum \left[\begin{array}{cc} B_{2,1} F_2^1 S_1 & B_{2,2} F_2^2 \end{array} \right] \\ S_3 &= \sum \left[\begin{array}{ccc} B_{3,1} F_3^1 S_2 & B_{3,2} F_3^2 S_1 & B_{3,3} F_3^3 \end{array} \right] \\ G_4 &= \sum \left[\begin{array}{cccc} B_{4,1} F_4^1 S_3 & B_{4,2} F_4^2 S_2 & B_{4,3} F_4^3 S_1 & B_{4,4} F_4^4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Databáze

- ▶ databáze distribučních funkcí pevnosti pro parametr měřítka $s = 1$ a proměnlivé:
 - ▶ parametry tvaru $m = 3-15, 20, 24, 40, 50, (100)$ a
 - ▶ počty vláken $n = 3-50, 60, 70, 80, 90, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500, 1000, (2000, 3000)$



Odezva jednoho vlákna

- ▶ Odezva jednoho vlákna (ξ = mezní přetvoření, e = přetvoření, $H(\cdot)$ = Heavisideova funkce)

$$q(e; \xi) = eH(\xi - e)$$

- ▶ střední odezva svazku $n \rightarrow \infty$

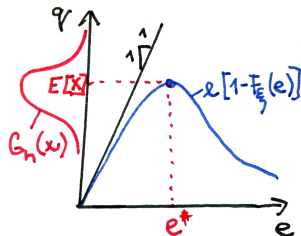
$$\mu(e) = \int_0^\infty eH(\xi - e) dF_\xi(\xi) = e \int_e^\infty f_\xi(\xi) d\xi = e[1 - F_\xi(e)]$$

- ▶ střední hodnota pevnosti svazku

$$E[X] = e^*[1 - F_\xi(e^*)]$$

- ▶ rozptyl pevnosti svazku

$$D[X] = n \cdot (e^*)^2 \cdot F_\xi(e^*) \cdot [1 - F_\xi(e^*)]$$

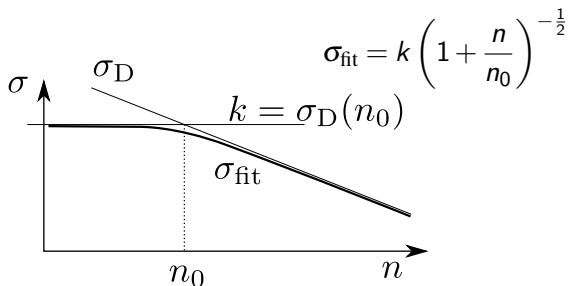


Aproximace směrodatné odchyly pevnosti svazku

- ▶ asymptota směrodatné odchyly pevnosti X svazku tvořeného Weibullovskými vlákny podle Danielse

$$\sigma_D(n) = \sqrt{D[X]} = \frac{m^{-\frac{1}{m}} s \sqrt{e^{-\frac{1}{m}} (1 - e^{-\frac{1}{m}})}}{\sqrt{n}}$$

- ▶ aproximační vztah – k = levá horizontální asymptota, $(\cdot)^{-\frac{1}{2}}$ = pravá asymptota se sklonem $-1/2$, n_0 = průsečík asymptot



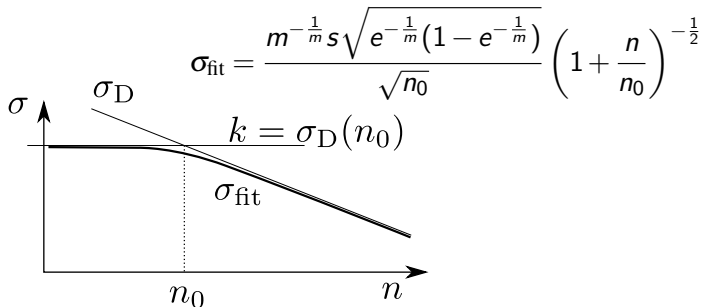
Aproximace směrodatné odchyly pevnosti svazku

- požadujeme rovnost dvou asymptot

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\text{fit}}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_D(n).$$

$$k = \sigma_D(n_0)$$

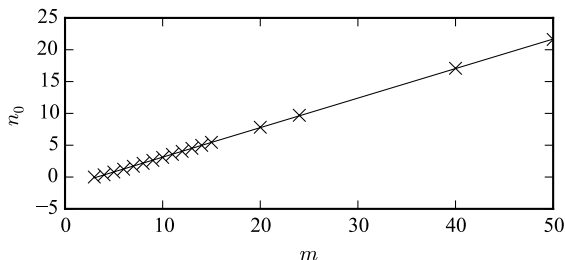
- vylepšená aproximace směrodatné odchyly pevnosti svazku vláken



Parametr n_0

- ▶ závislost parametru n_0 na parametru tvaru m Weibullova rozdělení je přibližně lineární $m = 3-50$

$$n_0 = 0.461m - 1.464$$



Závěr

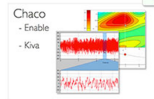
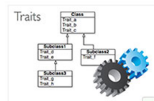
- ▶ analýzou rekurzivního vztahu distribuční funkce bylo možné vytvořit její implementaci v jazyce Python
- ▶ na základě této implementace bylo možné vytvořit databázi distribučních funkcí pro různé parametry Weibullova rozdělení
- ▶ tato data slouží pro odvození aproximační funkce, která by měla vracet hodnoty distribuční funkce bez nutnosti výpočtu rekurze
- ▶ zlepšená aproximace směrodatné odchylky pro malé počty vláken



mpmath

Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic

IP[y]: IPython
Interactive Computing



Děkuji za pozornost.

Aproximace pevnosti svazku křehkých vláken

Václav Sadílek

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky

21. května 2015



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpora tvorby excelentních týmů mezioborového výzkumu na VUT, CZ.1.07/2.3.00/30.0005