

CD04 Spolehlivost konstrukcí

Zadání:

Ze souboru 50-ti experimentálně získaných hodnot tlakové pevnosti betonu odhadněte:

- průměrnou hodnotu tlakové pevnosti betonu, výběrovou směrodatnou odchylku, šikmost souboru a hodnotu variačního koeficientu
- horní a dolní 5-ti procentní kvantil tlakové pevnosti betonu na základě analýzy naměřených dat
- horní a dolní 5-ti procentní kvantil tlakové pevnosti betonu z teoretického pravděp. modelu
- charakteristickou a návrhovou hodnotu tlakové pevnosti betonu v souladu s ČSN EN 1990, PŘÍLOHA D

Tab. 1 Naměřené hodnoty tlakové pevnosti betonu $f_{c,cube}$

	$f_{c,cube,i}$ [MPa]									
1-10	33,4	32,0	34,4	30,3	30,7	30,2	33,4	31,9	31,0	31,0
11-20	29,7	31,0	32,2	36,6	29,0	27,2	37,6	30,5	32,2	34,1
21-30	31,6	31,3	40,6	34,2	31,7	37,4	33,9	28,8	28,6	32,4
31-40	36,1	30,2	34,9	32,3	31,7	31,5	31,6	38,0	32,8	33,9
41-50	36,4	31,6	29,3	35,5	35,8	33,4	31,3	24,1	38,7	26,6

Řešení:

- statnovení charakteristik popisujících polohu, rozptýlení a nesouměrnost souboru
rozsah souboru :

$$n = 50$$

max. a min. hodnota souboru:

$$\min_i[f_{c,cube}] = 24,1 \text{ MPa}$$

$$\max_i[f_{c,cube}] = 40,6 \text{ MPa}$$

výběrový průměr $m_{fc,cube}$:

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$m_{fc,cube} = 32,5 \text{ MPa}$$

výběrová směrodatná odchylka $s_{fc,cube}$:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2}$$

$$s_{fc,cube} = 3,2 \text{ MPa}$$

výběrová šikmost $\alpha_{fc,cube}$:

$$a_x = \frac{n}{(n-1)(n-2)s_x^3} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^3$$

$$\alpha_{fc,cube} = 0,15239 -$$

variační koeficient $CoV_{fc,cube}$:

$$CoV_x = \frac{s_x}{m_x}$$

$$CoV_{fc,cube} = 0,098 -$$

b) Histogram a distribuční funkce $\Phi f_{c,cube}$

Tab. 2 Hranice tříd, četnosti a hodnoty distribuční funkce

Třídý		Střed	Četnost	$\Phi f_{c,cube}$
22,0	25,0	24,0	1	0,018
25,0	27,0	26,0	1	0,018
27,0	29,0	28,0	3	0,071
29,0	31,0	30,0	11	0,375
31,0	33,0	32,0	15	0,714
33,0	35,0	34,0	9	0,875
35,0	37,0	36,0	5	0,982
37,0	39,0	38,0	4	1,000
39,0	42,0	40,0	1	1,000

Σ 50

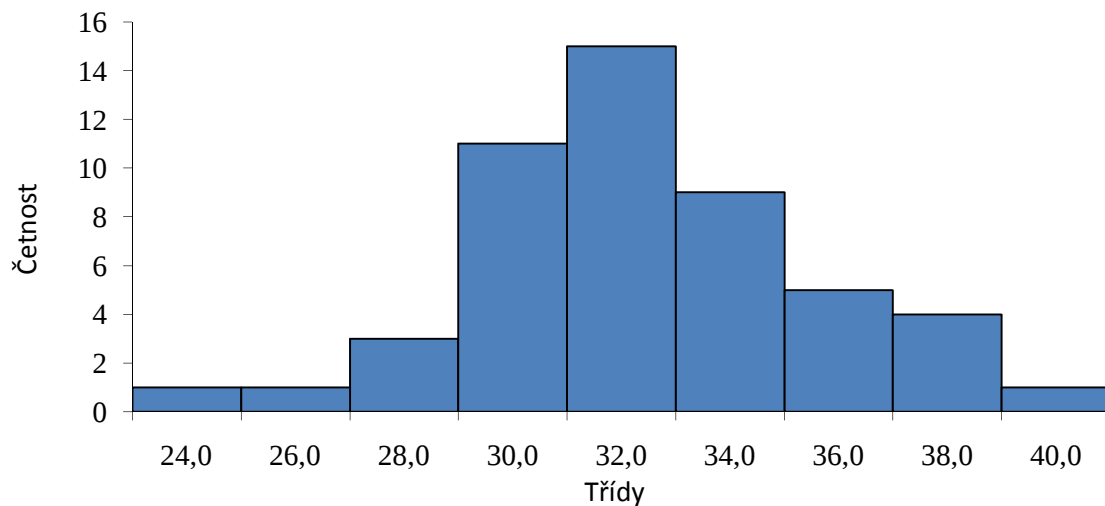
délka intervalu $h = 2,0$

Odhad dolního a horního 5-ti% kvantilu:

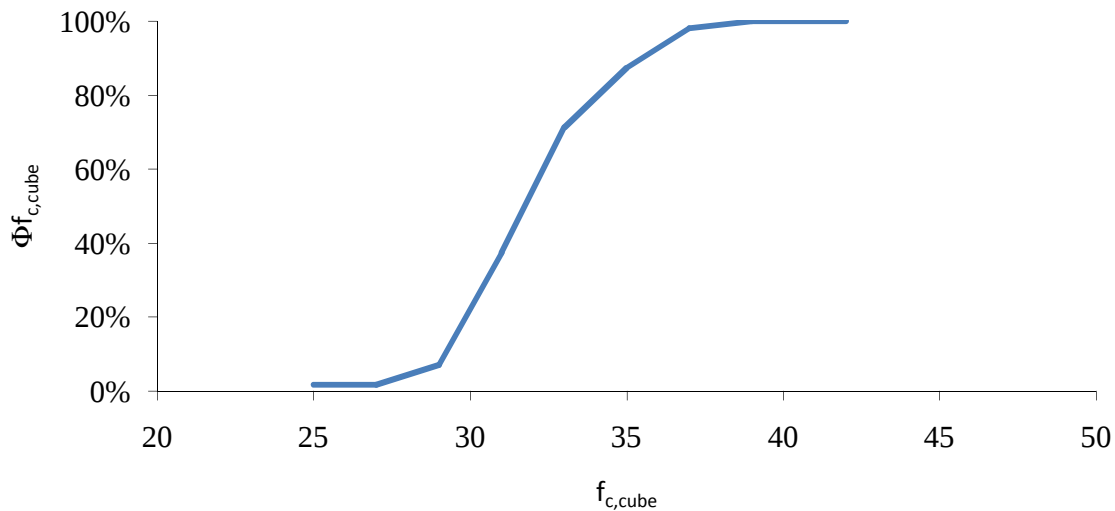
$f_{c,cube,0.05} = 28,2 \text{ MPa}$

$f_{c,cube,0.95} = 36,4 \text{ MPa}$

HISTOGRAM $f_{c,cube}$



DISTRIBUČNÍ FUNKCE $f f_{c,cube}$



c) Odhad horního a dolního 5-ti% kvantilu z teoretického pravděpodobnostního modelu

1) předpoklad normálního rozdělení tlakové pevnosti betonu $f_{c,cube}$

hustota pravděpodobnosti:

$$j(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}; -\infty < x < \infty; -\infty < m < \infty; 0 < s$$

průměrná hodnota:

$$\mu_{f_{c,cube}} = 32,5 \text{ MPa}$$

směrodatná odchylka:

$$\sigma_{f_{c,cube}} = 3,2 \text{ MPa}$$

Odhad dolního a horního 5-ti% kvantilu:

$$f_{c,cube,0.05} = 27,2 \text{ MPa}$$

$$f_{c,cube,0.95} = 37,7 \text{ MPa}$$

Odhad návrhové hodnoty tlakové pevnosti betonu jako $P(X < x_d) = 0,001$:

$$f_{c,cube,0.001} = 22,6 \text{ MPa}$$

2) předpoklad logaritmicko normálního rozdělení tlakové pevnosti betonu $f_{c,cube}$

hustota pravděpodobnosti:

$$Y = \ln(X); j(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2s^2}}; 0 < x < \infty; 0 < m < \infty; 0 < s$$

Tab. 3 Přirozené logaritmy naměřených tlakových pevností betonu $f_{c,cube}$

	$\ln(f_{c,cube,i})$ [MPa]									
1-10	3,5	3,5	3,5	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5	3,4	3,4
11-20	3,4	3,4	3,5	3,6	3,4	3,3	3,6	3,4	3,5	3,5
21-30	3,5	3,4	3,7	3,5	3,5	3,6	3,5	3,4	3,4	3,5
31-40	3,6	3,4	3,6	3,5	3,5	3,5	3,5	3,6	3,5	3,5
41-50	3,6	3,5	3,4	3,6	3,6	3,5	3,4	3,2	3,7	3,3

průměrná hodnota:

$$\mu_{f_{c,cube}}^* = 3,5$$

směrodatná odchylka:

$$\sigma_{f_{c,cube}}^* = 0,1$$

Odhad dolního a horního 5-ti% kvantilu:

$$f_{c,cube,0.05} = 27,5 \text{ MPa}$$

$$f_{c,cube,0.95} = 38,0 \text{ MPa}$$

Odhad návrhové hodnoty tlakové pevnosti betonu jako $P(X < x_d) = 0,001$:

$$f_{c,cube,0.001} = 23,8 \text{ MPa}$$

d) Odhad charakteristické a návrhové hodnoty tlakové pevnosti betonu dle ČSN EN 1990, PŘÍLOHA D

1) předpoklad normálního rozdělení tlakové pevnosti betonu $f_{c,cube}$

odhad charakteristické hodnoty

$$x_k = m_x - k_n \cdot s_x \quad f_{c,cube,k} = \quad \mathbf{27,3 \text{ MPa}}$$

odhad návrhové hodnoty

$$x_d = m_x - k_{d,n} \cdot s_x \quad f_{c,cube,d} = \quad \mathbf{22,8 \text{ MPa}}$$

$$x_d = h_d \frac{x_k}{g_m} \quad f_{c,cube,d} = \quad 18,2 \text{ MPa}$$

Pozn. Charakteristická a návrhová hodnota tlakové pevnosti byla stanovena za předpokladu neznámé hodnoty směrodatné odchylky tlakové pevnosti betonu

2) předpoklad logaritmicko normálního rozdělení tlakové pevnosti betonu $f_{c,cube}$

odhad charakteristické hodnoty

$$x_k = \exp(m_y - k_n s_y) \quad f_{c,cube,k} = \quad \mathbf{27,5 \text{ MPa}}$$

$$m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i); \quad s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - m_y)^2}$$

odhad návrhové hodnoty

$$x_d = \exp(m_y - k_{d,n} \cdot s_y) \quad f_{c,cube,d} = \quad \mathbf{23,9 \text{ MPa}}$$

$$x_d = h_d \frac{x_k}{g_m} \quad f_{c,cube,d} = \quad 18,3 \text{ MPa}$$

Pozn. Charakteristická a návrhová hodnota tlakové pevnosti byla stanovena za předpokladu neznámé hodnoty směrodatné odchylky tlakové pevnosti betonu

Tab. 4 Hodnoty k_n pro 5% charakteristickou hodnotu

n	1	2	4	6	8	10	20	30	∞
V_x známý	2,31	2,01	1,83	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
V_x neznámý	-	-	2,63	2,18	2,00	1,92	1,76	1,43	1,64

Tab. 5 Hodnoty $k_{d,n}$ pro návrhové hodnoty v mezních stavech únosnosti

n	1	2	4	6	8	10	20	30	∞
V_x známý	4,36	3,77	3,44	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,04
V_x neznámý	-	-	11,40	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,04

Závěr:

Charakteristická hodnota tlakové pevnosti betonu $f_{c,k}$ je definována jako 5-ti% dolní kvantil, $f_{c,k}=f_{c,0.05}$. Návrhová hodnota tlakové pevnosti betonu $f_{c,d}$ je pak dle ČSN 1990 definována jako kvantil odpovídající pravděpodobnosti $p_d=\Phi(-\alpha_r\cdot\beta)=-0,00118$ pro hodnotu citlivostního součinitele $\alpha_r=-0,8$ a indexu spolehlivosti $\beta=3,8$.

Tab. 6 Charak. a návrhová hodnota tlakové pevnosti betonu

	Dle pravd. mod.		Dle ČSN 1990		Dle ČSN 1990*		Dle ČSN 1992-1	
	N	LN	N	LN	N	LN	C20/25	C25/30
$f_{c,cube,k}$ [MPa]	27,2	27,5	27,3	27,5	-	-	25,0	30,0
$f_{c,cube,d}$ [MPa]	22,6	23,8	22,8	23,9	18,2	18,3	16,7	20,0

* Návrhová je stanovena jako podíl char. Hodnoty tlakové pevnosti betonu a příslušného součinitele spolehlivosti materiálu γ_m

Z tabulky Tab. 6 jsou zřejmé rozdíly ve výsledné hodnotě charakteristické a návrhové tlakové pevnosti betonu v případě jejího odhadu na základě znalosti teoretického pravděpodobnostního modelu v podobě normálního a lognormálního rozdělení. Dále jsou v tabulce uvedeny hodnoty charakteristické a návrhové tlakové pevnosti betonu získané dle ČSN 1990 příloha D. Návrhová hodnota tlakové pevnosti je stanovena dle článku D 7.2 a D 7.3. V případě malého počtu zkoušek ($n < 30$) se doporučuje stanovit návrhovou hodnotu tlakové pevnosti betonu stanovit s využitím součinitele spolehlivosti materiálu. Pokud je k dispozici velký počet měření, lze návrhovou hodnotu tlakové pevnosti betonu stanovit na základě statistického vyhodnocení daného souboru výsledků zkoušek. Je-li šikmost náhodného výběru $\alpha_x < 0,2$, lze ho považovat za relativně symetrický (data jsou přibližně symetricky rozptýlena kolem průměru) a pro popis jeho náhodných vlastností je možné použít normální rozdělení (které má šikmost rovnou 0). V případě větších šikmosti je nutno při odhadu návrhové hodnoty tlakové pevnosti betonu vliv šikmosti ve výpočtu zohlednit.