

Příklad 3.3– Vyhodnocení tlakové zkoušky na betonových krychlích

Ze souboru 100 experimentálně získaných hodnot tlakové pevnosti betonu (tabulka 3.5) odhadněte:

- a) střední hodnotu tlakové pevnosti betonu f_c , směrodatnou odchylku, šikmost a hodnotu variačního koeficientu
- b) horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu na základě analýzy naměřených dat
- c) horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu za předpokladu teoretického pravděpodobnostního modelu normálního a lognormálního dvouparametrického rozdělení

i	$f_{c,i}[\text{MPa}]$									
1-10	31.1	26.1	33.5	30.9	29.7	31.3	22.1	34.0	34.8	41.6
11-20	30.4	31.0	31.9	39.5	32.8	28.1	32.5	33.6	30.7	35.6
21-30	30.4	36.5	32.6	33.9	25.2	37.1	25.6	34.1	34.6	29.7
31-40	29.3	31.7	34.0	29.5	29.5	32.4	32.0	24.5	24.2	29.6
41-50	34.4	32.0	31.1	33.7	35.0	35.5	33.2	30.9	35.8	38.1
51-60	30.5	30.8	36.4	27.8	30.1	27.4	34.1	26.7	24.1	34.6
61-70	33.7	32.6	31.8	25.8	35.1	30.0	33.6	36.4	34.3	32.1
71-80	32.3	26.9	24.9	28.1	33.8	30.8	35.3	29.7	32.7	31.2
81-90	30.1	32.6	36.4	31.4	33.8	37.0	38.9	29.6	30.1	29.7
91-100	28.6	38.5	28.7	25.6	31.8	26.7	29.2	36.6	37.0	27.3

Tab. 3.5: Tabulka naměřených tlakových pevností betonu.

Pro vyhodnocení použijeme program EXCEL (v závorce budou uváděny funkce programu Excel v následujícím formátu: FUNKCE). Stejně výsledky obdržíme při použití programu FReET (viz př. 3.1).

Ad a) Stanovení charakteristik popisujících polohu, rozptýlení a nesouměrnost souboru hodnot

Náhodnou veličinu pevnost označíme X , která má spojité rozdělení. Máme realizaci náhodného výběru $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ z X o rozsahu $n = 100$ (POČET).

Nejprve si vytvoříme histogram (obr. 3.10) z hodnot, které si roztřídíme do $k \doteq \sqrt{n} = 10$ tříd stejné šířky h . K tomu potřebujeme minimální $f_{c,\min} = 22.1$ MPa

a maximální $f_{c,\max} = 41.6$ MPa hodnotu ze souboru dat. Interval tříd zvolíme $\langle 22; 42 \rangle$, ve kterém leží naše hodnoty a rozdělíme ho na $k = 10$ tříd o šířce $d = (f_{c,\min} - f_{c,\max}) / k = 2$ (viz tab. 3.6 první a druhý sloupec). Určíme četnost hodnot v jednotlivých třídách (funkce ČETNOST)

Třídy	Střed	Četnost	Kumulativní četnost
22.0 – 24.0	23.0	1	0.010
24.0 – 26.0	25.0	8	0.090
26.0 – 28.0	27.0	7	0.160
28.0 – 30.0	29.0	14	0.300
30.0 – 32.0	31.0	23	0.530
32.0 – 34.0	33.0	20	0.730
34.0 – 36.0	35.0	14	0.870
36.0 – 38.0	37.0	8	0.950
38.0 – 40.0	39.0	4	0.990
40.0 – 42.0	41.0	1	1.000
$\Sigma = 100$			

Tab. 3.6: Hranice tříd, četnosti a relativní kumulativní četnost.

Výběrový průměr m (PRŮMĚR)

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 31.7 \text{ MPa}$$

Výběrový rozptyl s (SMODCH.VÝBĚR)

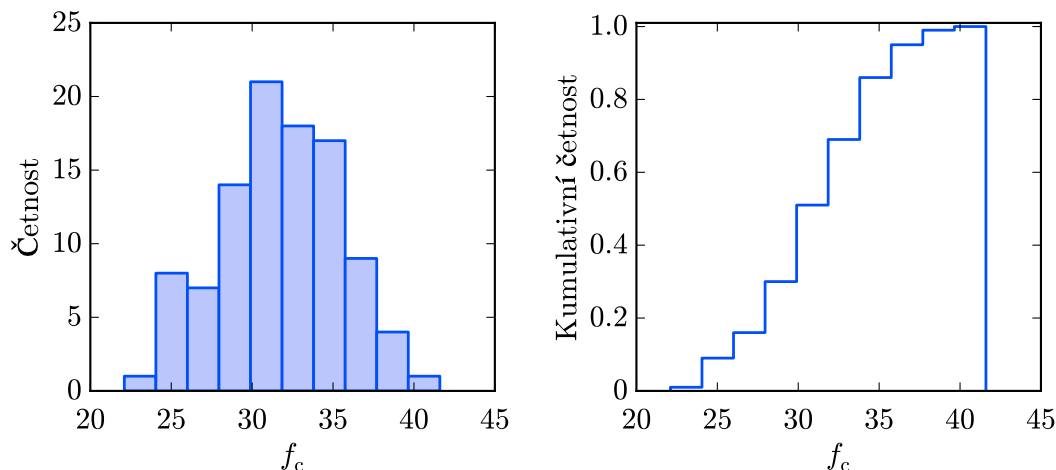
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2} = 3.8 \text{ MPa}$$

Výběrová šikmost (SKEW)

$$a = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m}{s} \right)^3 = -0.098$$

Variační koeficient

$$COV = \frac{s}{m} = 0.119$$



Obr. 3.10: Histogram a empirická distribuční funkce pevnosti betonu.

Ad b) Horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu na základě analýzy naměřených dat

Pro výpočet dolního 5% kvantilu pevnosti použijeme následující hodnoty z tabulky 3.6: krajní hodnotu třídy a jemu odpovídající kumulativní četnost (24; 0.01) a (26; 0.09). Mezi těmito hodnotami budeme lineárně interpolovat. Pro tyto hodnoty se jedná o velmi jednoduchou úlohu, protože 0.05 leží přesně uprostřed intervalu (0.01; 0.09). Pro dolní 5% kvantil dostáváme tedy hodnotu $f_{c,0.05} = 25$ MPa.

Podobným postupem určíme horní 5% kvantil pevnosti betonu. V našem případě máme hodnotu pevnosti přímo v tabulce $f_{c,0.95} = 38$ MPa.

Ad c) Horní a dolní 5% kvantil tlakové pevnosti betonu z teoretického pravděpodobnostního modelu

Předpokládejme, že pevnost betonu má normální rozdělení $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ .

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty; -\infty < \mu < \infty; \sigma^2 > 0$$

Pro střední hodnotu a směrodatnou odchylku použijeme jejich odhady viz výše uvedený výběrový průměr a výběrová směrodatná odchylka. Dosadíme-li vypočtené hodnoty dostáváme:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(31.706, 3.770^2)$$

Tvar rozdělení (hustota i distribuční funkce) je vyobrazen zelenou barvou na obrázku 3.11 spolu s histogramem z naměřených dat. Odhad dolního 5% kvantilu

pevnosti betonu (NORMINV)

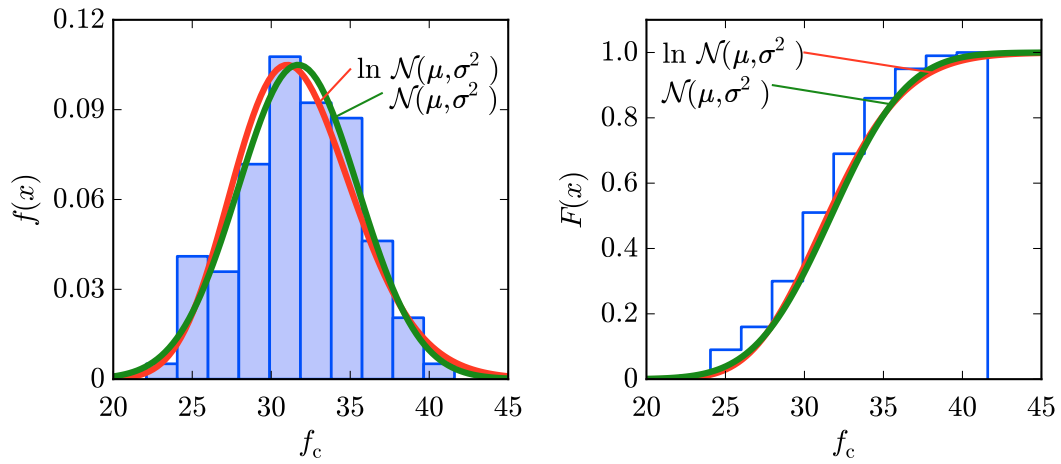
$$f_{c,0.05} = F^{-1}(0.05) = 25.505 \text{ MPa}$$

Odhad horního 5% kvantilu pevnosti betonu (NORMINV)

$$f_{c,0.95} = F^{-1}(0.95) = 37.906 \text{ MPa}$$

Odhad návrhové hodnoty pevnosti betonu, odpovídá dolnímu kvantilu 1 ‰ (NORMINV)

$$f_{c,0.001} = F^{-1}(0.001) = 20.056 \text{ MPa}$$



Obr. 3.11: Histogram, empirická distribuční funkce pevnosti betonu proložená teoretickými pravděpodobnostními rozděleními – normální (zelené) a lognormální (červené) rozdělení.

Nyní předpokládejme, že pevnost betonu (náhodná veličina X) má lognormální rozdělení $\ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ . Hustota pravděpodobnosti $f_X(x)$ má podobný tvar jako pro normální rozdělení s parametry λ a ζ :

$$f_X(x; \lambda, \zeta) = \frac{1}{x\zeta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\lambda)^2}{2\zeta^2}} \quad 0 < x < \infty; 0 < \lambda < \infty; \zeta^2 > 0$$

Střední hodnota a rozptyl daného rozdělení lze určit z parametrů λ a ζ následovně:

$$\mu = e^{\lambda+\zeta^2/2}, \quad \sigma^2 = (e^{\zeta^2} - 1)e^{2\lambda+\zeta^2} \quad (3.29)$$

Náhodná veličina X má lognormální rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ^2 , pokud transformovaná veličina $Y = \ln(X)$ má normální rozdělení s parametry λ, ζ^2 .

Použijeme-li vypočtené hodnoty, dostáváme odhad střední hodnoty pro parametr $\lambda = 3.449$ a směrodatné odchyly $\zeta = 0.122$ náhodné veličiny Y . Pro náhodnou veličinu X můžeme tedy napsat:

$$X \sim \ln \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \ln \mathcal{N}(31.704, 3.882^2)$$

Vizuální porovnání tvaru rozdělení (hustota i distribuční funkce červené barvy) je možné na obrázku 3.11 s histogramem z naměřených dat. Odhad dolního 5% kvantilu pevnosti betonu (EXP (NORMINV))

$$f_{c,0.05} = F^{-1}(0.05) = 25.770 \text{ MPa}$$

Odhad horního 5% kvantilu pevnosti betonu (EXP (NORMINV))

$$f_{c,0.95} = F^{-1}(0.95) = 38.451 \text{ MPa}$$

Odhad návrhové hodnoty pevnosti betonu, odpovídá dolnímu kvantilu 1 ‰ (EXP (NORMINV))

$$f_{c,0.001} = F^{-1}(0.001) = 21.615 \text{ MPa}$$

V této úloze jsme pracovali s materiálovou vlastností (tlaková pevnost betonu) jako s náhodnou veličinou, stejně bychom postupovali i u vyhodnocování jiných veličin – např. délka, šířka, atd.