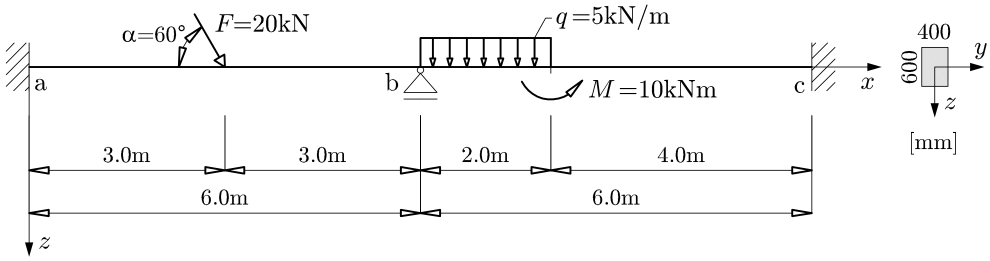
1 Obecná deformační metoda

1.1 Spojitý nosník

Obecnou deformační metodou vypočítejte a vykreslete vnitřní síly spojitého nosníku na obrázku 1. Nosník má obdélníkový průřez o rozměrech 0.4×0.6 m. Nosník je na obou koncích vetknutý a uprostřed rozpětí je umístěna posuvná podpora. Zatížení nosníku je tvořeno osamělou silou o velikosti 20 kN a sklonem 60 °, rovnoměrným zatížením s intenzitou 5 kNm^{-1} na délce 2 m a osamělým momentem o velikosti 10 kNm umístěným 2 m od podpory b. Materiál nosníku má modul pružnosti $E = 36\,\mathrm{GPa}$.



Obrázek 1: Schéma nosníku

Základní soustavu rovnic pro řešení úlohy můžeme zapsat:

$$[\boldsymbol{k}] \cdot \{\boldsymbol{r}\} = \{\boldsymbol{F}\} \tag{1}$$

kde $[\boldsymbol{k}]$ = matice tuhosti prutové soustavy, $\{\boldsymbol{F}\}$ = silový vektor, $\{\boldsymbol{r}\}$ = vektor neznámých deformací. Průřezová plocha nosníku je

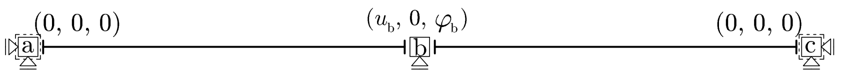
$$A = b \cdot h = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24\,\mathrm{m}^2$$

Moment setrvačnosti průřezu je

$$I_\mathrm{y} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 0.4 \cdot 0.6^3 = 0.0072\,\mathrm{m}^4$$

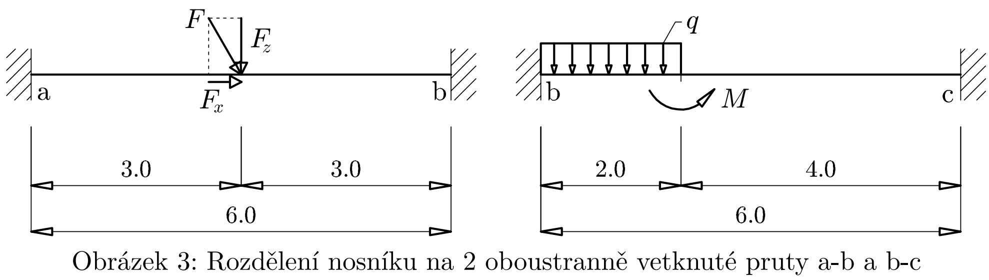
1. Sestavíme výpočtový model viz obrázek 2. Uzly si označíme písmeny a, b, c a určíme minimální stupeň přetvárné neurčitosti n_p. V rovinné úloze má každý styčník 3 stupně volnosti (u_i, w_i, φ_i). Jeden posun ve směru globální osy X, ve směru osy Z a jedna rotace kolem osy Y (proti směru hodinových ručiček). Globální vektor parametrů deformace (neznámé deformace) $\{\boldsymbol{r}\}$ je v našem případě $\{\boldsymbol{r}\} = \{u_\mathrm{b}, \varphi_\mathrm{b}\}^\mathrm{T} \Rightarrow n_\mathrm{p} = 2$.

$$\{\boldsymbol{r}\} = \left\{ \begin{array}{c} u_\mathrm{b} \\ \varphi_\mathrm{b} \end{array} \right\} \tag{2}$$



Obrázek 2: Výpočtový model

2. Spojitý nosník je rozdělen na dva pruty a-b a b-c, obr. 3.



Obrázek 3: Rozdělení nosníku na 2 oboustranně vetknuté pruty a-b a b-c

$$F_\mathrm{x} = F \cdot \cos(\alpha) = 20 \cdot \cos(60\,°) = 10\,\mathrm{kN}$$

$$F_\mathrm{z} = F \cdot \sin(\alpha) = 20 \cdot \sin(60\,^\circ) = 17.32\,\mathrm{kN}$$

Pro výpočet matice tuhosti obou prutů použijeme tab. 11.3a (tab. 8.3a), protože oba pruty jsou oboustranně vetknuté. Matice tuhosti je symetrická. Matice tuhosti pro oba $[\boldsymbol{k}_\mathrm{ab}]$ a $[\boldsymbol{k}_\mathrm{bc}]$ jsou stejné, protože délka, průřezová plocha, moment setrvačnosti a modul pružnosti jsou pro oba pruty stejné.

$$[\boldsymbol{k}_\mathrm{ab}] = [\boldsymbol{k}_\mathrm{bc}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.44 & 0 & 0 & -1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0144 & -0.0432 & 0 & -0.0144 & -0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.1728 & 0 & 0.432 & 0.0864 \\ -1.44 & 0 & 0 & 1.44 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0144 & 0.0432 & 0 & 0.0144 & 0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.0864 & 0 & 0.0432 & 0.1728 \end{pmatrix} \left[\cdot 10^9 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

Pokud bychom měli za úkol vypočítat pouze vektor neznámých deformací $\{\boldsymbol{r}\}$, potřebovali bychom pouze některé prvky matice tuhosti $[\boldsymbol{k}]$ a vektoru primárních koncových sil $\{\bar{\boldsymbol{R}}\}$. Tyto prvky jsou zvýrazněné dále v textu šedou barvou.

$$[\boldsymbol{k}_\mathrm{ab}] =$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} u_\mathrm{a}(0) & w_\mathrm{a}(0) & \varphi_\mathrm{a}(0) & u_\mathrm{b}(1) & w_\mathrm{b}(0) & \varphi_\mathrm{b}(2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1.44 & 0 & 0 & -1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0144 & -0.0432 & 0 & -0.0144 & -0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.1728 & 0 & 0.0432 & 0.0864 \\ -1.44 & 0 & 0 & 1.44 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0144 & 0.0432 & 0 & 0.0144 & 0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.0864 & 0 & 0.0432 & 0.1728 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_\mathrm{a}(0) \\ w_\mathrm{a}(0) \\ \varphi_\mathrm{a}(0) \\ u_\mathrm{b}(1) \\ w_\mathrm{b}(0) \\ \varphi_\mathrm{b}(2) \end{array} \end{array} \left[\cdot 10^9 \tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$[\boldsymbol{k}_\mathrm{bc}] =$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} u_\mathrm{b}(1) & w_\mathrm{b}(0) & \varphi_\mathrm{b}(2) & u_\mathrm{c}(0) & w_\mathrm{c}(0) & \varphi_\mathrm{c}(0) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1.44 & 0 & 0 & -1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0144 & -0.0432 & 0 & -0.0144 & -0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.1728 & 0 & 0.0432 & 0.0864 \\ -1.44 & 0 & 0 & 1.44 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0144 & 0.0432 & 0 & 0.0144 & 0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.0864 & 0 & 0.0432 & 0.1728 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_\mathrm{b}(1) \\ w_\mathrm{b}(0) \\ \varphi_\mathrm{b}(2) \\ u_\mathrm{c}(0) \\ w_\mathrm{c}(0) \\ \varphi_\mathrm{c}(0) \end{array} \end{array} \left[\cdot 10^9 \tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

Použitím zvýrazněných prvků matice sestavíme globální matici tuhosti prutové soustavy

$$[\boldsymbol{k}] = \left(\begin{array}{c|c} 1.44 \cdot 10^9 & 0 \\ +1.44 \cdot 10^9 & +0 \\ \hline 0 & 1.728 \cdot 10^8 \\ +0 & +1.728 \cdot 10^8 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2.88 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 3.456 \cdot 10^8 \end{pmatrix} \tag{3}$$

3. Zatěžovací vektor $\{\boldsymbol{F}\}$ je roven rozdílu vektoru uzlového zatížení $\{\boldsymbol{S}\}$ a primárního vektoru koncových sil $\{\bar{\boldsymbol{R}}\}$ (čárka nad R značí, že se jedná o primární vektor). V našem příkladě není žádné uzlové zatížení, z čehož vyplývá nulový vektor uzlových zatížení $\{\boldsymbol{S}\} = \emptyset$.

$$\{\boldsymbol{F}\} = \{\boldsymbol{S}\} - \{\bar{\boldsymbol{R}}\} \tag{4}$$

Primární vektor koncových sil $\{\bar{\boldsymbol{R}}_\mathrm{ab}\}$ pro prut zatížený osamělou silou určíme podle tab. 11.2c

(14.10 řádek 2) (tab. 8.1a/2)

$$\{\bar{\boldsymbol{R}}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{\mathrm{ab}} \\ \bar{Z}_{\mathrm{ab}} \\ \bar{M}_{\mathrm{ab}} \\ \bar{X}_{\mathrm{ba}} \\ \bar{Z}_{\mathrm{ba}} \\ \bar{M}_{\mathrm{ba}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -8660 \\ 12990 \\ -5000 \\ -8660 \\ -12990 \end{Bmatrix} [\mathrm{N}] \tag{5}$$

Primární vektor koncových sil $\{\bar{\boldsymbol{R}}^1_{\mathrm{bc}}\}$ pro rovnoměrné zatížení sestavíme podle tab. 14.10(řádek 11) (tab. 8.1a/7)

$$\{\bar{\boldsymbol{R}}^1_{\mathrm{bc}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}^1_{\mathrm{bc}} \\ \bar{Z}^1_{\mathrm{bc}} \\ \bar{M}^1_{\mathrm{bc}} \\ \bar{X}^1_{\mathrm{cb}} \\ \bar{Z}^1_{\mathrm{cb}} \\ \bar{M}^1_{\mathrm{cb}} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -9074 & -\frac{q\cdot a}{2\cdot l^3}\left[2\cdot l\cdot\left(l^2-a^2\right)+a^3\right] \\ 6111 & \frac{q\cdot a^2}{12\cdot l^2}\left(6\cdot b^2+3\cdot a\cdot b+a\cdot l\right) \\ 0 & 0 \\ -926 & -\frac{q\cdot a^3}{2\cdot l^3}\left(l+b\right) \\ -1667 & -\frac{q\cdot a^3}{12\cdot l^3}\left(3\cdot b-l\right) \end{array} \right\} [\mathrm{N}]$$

Primární vektor koncových sil $\{\bar{\boldsymbol{R}}^2_{\mathrm{bc}}\}$ pro zatížení osamělým momentem určíme podle tab. 11.2d (14.10 řádek 9) (tab. 8.1a/3)

$$\{\bar{\boldsymbol{R}}^2_{bc}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}^2_{\mathrm{bc}} \\ \bar{Z}^2_{\mathrm{bc}} \\ \bar{M}^2_{\mathrm{bc}} \\ \bar{X}^2_{\mathrm{cb}} \\ \bar{Z}^2_{\mathrm{cb}} \\ \bar{M}^2_{\mathrm{cb}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2222 \\ 0 \\ 0 \\ 2222 \\ 3333 \end{Bmatrix} [\mathrm{N}]$$

Primární vektor koncových sil $\{\bar{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{bc}}\}$

$$\{\bar{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{bc}}\} = \{\bar{\boldsymbol{R}}^1_{\mathrm{bc}}\} + \{\bar{\boldsymbol{R}}^2_{\mathrm{bc}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{\mathrm{bc}} \\ \bar{Z}_{\mathrm{bc}} \\ \bar{M}_{\mathrm{bc}} \\ \bar{X}_{\mathrm{cb}} \\ \bar{Z}_{\mathrm{cb}} \\ \bar{M}_{\mathrm{cb}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -11296 \\ 6111 \\ 0 \\ 1296 \\ 1666 \end{Bmatrix} [\mathrm{N}] \tag{6}$$

Zatěžovací vektor $\{\boldsymbol{F}\}$ určíme podle rovnice 4. Pro výpočet využijeme pouze hodnoty odpovídající neznámým deformacím u_{b} a φ_{b}.

$$\{\mathbf{F}\} = \{\emptyset\} - \begin{Bmatrix} -5000+0 \\ -12990+6111 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000 \\ 6879 \end{Bmatrix}$$

4. Vektor neznámých deformací $\{\boldsymbol{r}\}$ získáme řešením soustavy $n_{\mathrm{p}} = 2$ rovnic o $n_{\mathrm{p}} = 2$ neznámých.

$$\begin{pmatrix} 2.88\cdot10^9 & 0 \\ 0 & 3.456\cdot10^8 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{\mathrm{b}} \\ \varphi_{\mathrm{b}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000 \\ 6879 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} u_{\mathrm{b}} \\ \varphi_{\mathrm{b}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.736\cdot10^{-6} \\ 19.905\cdot10^{-6} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{rad} \end{bmatrix}$$

5. Nyní vyřešíme vektor koncových sil. $\left\{\widehat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{bc}}\right\}$ je sekundární vektor koncových sil (značeno stříškou). Pro řešení opět potřebujeme pouze zvýrazněné prvky – sloupce, které mají vztah s neznámými deformacemi.

$$\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{ab}}\} = \{\bar{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{ab}}\} + \left\{\widehat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{ab}}\right\} = \{\bar{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{ab}}\} + [\boldsymbol{k}_{\mathrm{ab}}] \cdot \{\boldsymbol{r}_{\mathrm{ab}}\} \tag{7}$$

$$\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{bc}}\} = \{\bar{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{bc}}\} + \left\{\widehat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{bc}}\right\} = \{\bar{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{bc}}\} + [\boldsymbol{k}_{\mathrm{bc}}] \cdot \{\boldsymbol{r}_{\mathrm{bc}}\} \tag{8}$$

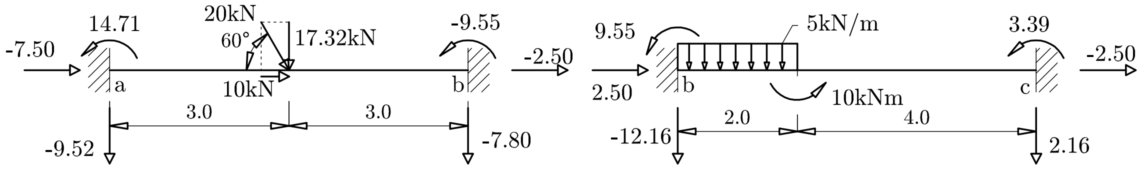
$$\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{ab}}\} = \begin{Bmatrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -8660 \\ 12990 \\ -5000 \\ -8660 \\ -12990 \end{Bmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1.44 & 0 & 0 & -1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0144 & -0.0432 & 0 & -0.0144 & -0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.1728 & 0 & 0.0432 & 0.0864 \\ -1.44 & 0 & 0 & 1.44 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0144 & 0.0432 & 0 & 0.0144 & 0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.0864 & 0 & 0.0432 & 0.1728 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.736 \\ 0 \\ 19.905 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

$$\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{bc}}\} = \begin{Bmatrix} X_{bc} \\ Z_{bc} \\ M_{bc} \\ X_{cb} \\ Z_{cb} \\ M_{cb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -11296 \\ 6111 \\ 0 \\ 1296 \\ 1666 \end{Bmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1.44 & 0 & 0 & -1.44 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0144 & -0.0432 & 0 & -0.0144 & -0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.1728 & 0 & 0.0432 & 0.0864 \\ -1.44 & 0 & 0 & 1.44 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0144 & 0.0432 & 0 & 0.0144 & 0.0432 \\ 0 & -0.0432 & 0.0864 & 0 & 0.0432 & 0.1728 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1.736 \\ 0 \\ 19.905 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^3$$

Násobitel 10^3 byl získán součinem násobitele matice tuhosti 10^9 a násobitele vektoru deformací 10^{-6}.

$$\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{ab}}\} = \begin{Bmatrix} X_{\mathrm{ab}} \\ Z_{\mathrm{ab}} \\ M_{\mathrm{ab}} \\ X_{\mathrm{ba}} \\ Z_{\mathrm{ba}} \\ M_{\mathrm{ba}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7500.16 \\ -9519.90 \\ 14709.80 \\ -2500.16 \\ -7800.00 \\ -9550.00 \end{Bmatrix} [\mathrm{N}, \mathrm{Nm}]$$

$$\{\boldsymbol{R}_{\mathrm{bc}}\} = \begin{Bmatrix} X_{\mathrm{bc}} \\ Z_{\mathrm{bc}} \\ M_{\mathrm{bc}} \\ X_{\mathrm{cb}} \\ Z_{\mathrm{cb}} \\ M_{\mathrm{cb}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2500 \\ -12156 \\ 9550 \\ -2500 \\ 2156 \\ 3385 \end{Bmatrix} [\mathrm{N}, \mathrm{Nm}]$$



Obrázek 4: Kontrola rovnováhy na prutu [kN, kNm]

6. Kontrola rovnováhy na prutu – obr. 4.

Bar a – b

$$\sum F_x = 0 : -7.50 + 10 - 2.50 = 0$$

$$\sum F_z = 0 : -9.52 + 17.32 - 7.8 = 0$$

$$\sum M_a = 0 : 14.71 - 17.32 \cdot 3 - (-7.8) \cdot 6 + (-9.55) = 0$$

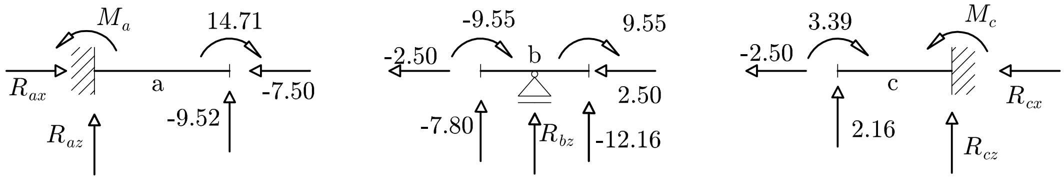
Bar b – c

$$\sum F_x = 0 : 2.50 + (-2.50) = 0$$

$$\sum F_z = 0 : -12.16 + 5 \cdot 2 + 2.16 = 0$$

$$\sum M_b = 0 : 9.55 - \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 10 + 3.39 - 2.16 \cdot 6 = 0$$

7. Kontrola rovnováhy v bodech a, b a c – obr. 5.



Obrázek 5: Force equilibrium in nodes a, b and c [kN, kNm]

Node a

$$\sum F_{xa} = 0 : R_{ax} - (-7.50) = 0 \Rightarrow R_{ax} = -7.50\,\mathrm{kN}$$

$$\sum F_{za} = 0 : R_{az} + (-9.52) = 0 \Rightarrow R_{az} = 9.52\,\mathrm{kN}$$

$$\sum M_a = 0 : M_c - 14.71 = 0 \Rightarrow M_a = 14.71\,\mathrm{kNm}$$

Node b

$$\sum F_{xb} = 0 : -2.50 + 2.50 = 0$$

$$\sum F_{zb} = 0 : R_{bz} - 7.80 - 12.16 = 0 \Rightarrow R_{bz} = 19.96\,\mathrm{kN}$$

$$\sum M_b = 0 : -9.55 + 9.55 = 0$$

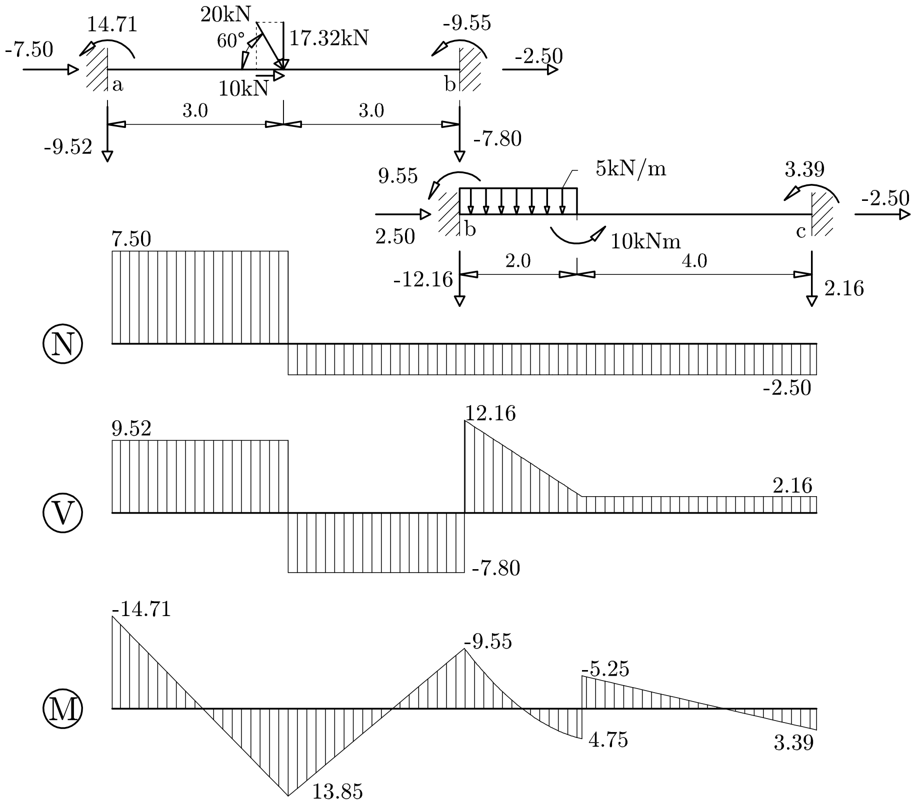
Node c

$$\sum F_{xc} = 0 : R_{cx} - (-2.50) = 0 \Rightarrow R_{cx} = -2.50\,\mathrm{kN}$$

$$\sum F_{zc} = 0 : R_{cz} + 2.16 = 0 \Rightarrow R_{cz} = -2.16\,\mathrm{kN}$$

$$\sum M_c = 0 : M_c - 3.39 = 0 \Rightarrow M_c = 3.39\,\mathrm{kNm}$$

8. Diagramy vnitřních sil (N – normálová síla, V – posouvající síla, M – ohybový moment) – obr. 6.



Obrázek 6: Vnitřní síly