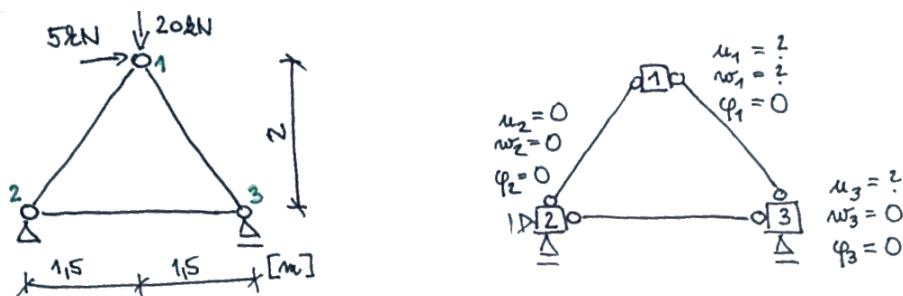


1.3 Příhradová konstrukce

Obecnou deformační metodou vyřešte vnitřní síly na jednoduché příhradové konstrukci. Průřezová plocha prutů je $A = 15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ a modul pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$.



Obrázek 12: Příhradová konstrukce a výpočtový model

1. Určení minimálního stupně přetvárné neurčitosti n_p a výpočtový model. Z obrázku 12 vpravo vyplývá stupeň přetvárné neurčitosti $n_p = 3$.
2. Globální vektor parametrů deformace $\mathbf{r}$ (neznámé deformace) a jemu odpovídající globální vektor uzlového (styčnickového) zatížení $\mathbf{S}$.

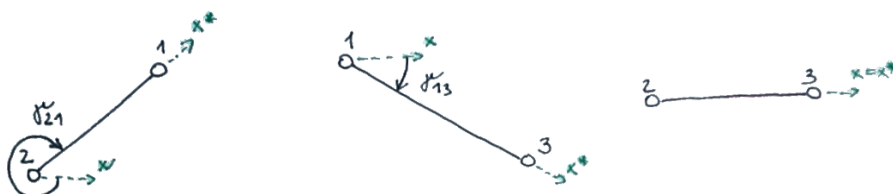
$$\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Vektor uzlových zatížení obsahuje síly odpovídající deformacím obsaženým ve vektoru neznámých deformací. Deformaci u_1 ve směru globální osy x ve styčniku 1 odpovídá síla 5000 N. Ve styčniku 3 se nenachází žádná síla ve směru osy x ve směru posunu u_3 , proto 0.

$$\{\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} 5000 \\ 20000 \\ 0 \end{Bmatrix} [\text{N}] \quad (22)$$

3. Výpočet globálních matic tuhosti pro jednotlivé pruty (volím pruty 2-1, 1-3, 2-3) a sestavení globální matice tuhosti prutové soustavy.

Protože jsou všechny pruty oboustranně kloubově připojené (kloub-kloub), budou následující matice tuhosti zjednodušeny na matice 4×4 . Pro výpočet matic tuhosti šikmých prutů použijeme tabulku 8.2d.



Obrázek 13: Úhly natočení jednotlivých prutů

Parametry pro prut 2-1 – $l = 2.5 \text{ m}$, $s = -\frac{4}{5}$ a $c = \frac{3}{5}$.

$$[\mathbf{k}_{21}] = \begin{pmatrix} u_2 & w_2 & u_1 & w_1 \\ \cdot & \cdot & -45.36 & 60.48 \\ \cdot & \cdot & 60.48 & -80.64 \\ \cdot & \cdot & 45.36 & -60.48 \\ \cdot & \cdot & -60.48 & 80.64 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ w_2 \\ u_1 \\ w_1 \end{matrix} \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Parametry pro prut 1-3 – $l = 2.5 \text{ m}$, $s = \frac{4}{5}$ a $c = \frac{3}{5}$.

$$[k_{13}] = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 & u_3 & w_3 \\ 45.36 & 60.48 & -45.36 & . \\ 60.48 & 80.64 & -60.48 & . \\ -45.36 & -60.48 & 45.36 & . \\ -60.48 & -80.64 & 60.48 & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_3 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Lokální i globální souřadný systém prutu 2-3 jsou totožné, proto můžeme použít tabulku 8.3d pro lokální matice tuhosti prutu.

$$[k_{23}] = \begin{pmatrix} u_2 & w_2 & u_3 & w_3 \\ . & . & -105 & . \\ . & . & 0 & . \\ . & . & 105 & . \\ . & . & 0 & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Globální matici tuhosti soustavy prutů získáme sečtením příslušných tuhostí pro naše neznámé deformace (šedá políčka v maticích tuhostí). Vznikne tak matice o velikosti $n_p \times n_p$.

$$[k] = \left(\begin{array}{cc|c} 45.36 & -60.48 & -45.36 \\ +45.36 & +60.48 & \\ \hline -60.48 & 80.64 & -60.48 \\ +60.48 & +80.64 & \\ \hline -45.36 & -60.48 & 45.36 \\ & & +105 \end{array} \right) \cdot 10^6 = \begin{pmatrix} 90.72 & 0 & -45.36 \\ 0 & 161.28 & -60.48 \\ -45.36 & -60.48 & 150.36 \end{pmatrix} \cdot 10^6 \quad (23)$$

4. Řešení soustavy lineárních rovnic (např. Gaussova eliminační metoda):

$$[k] \cdot \{r\} = \{F\} \quad (24)$$

Protože se jedná o příhradovou konstrukci, kde je zatížení soustředěno ve styčnicích, vektor sil $\{F\}$ je roven vektoru uzlových zatížení.

$$\{F\} = \{S\} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} 90.72 & 0 & -45.36 \\ 0 & 161.28 & -60.48 \\ -45.36 & -60.48 & 150.36 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000 \\ 20000 \\ 0 \end{Bmatrix} [\text{N}] \quad (26)$$

Vyřešením soustavy získáváme neznámé deformace konstrukce:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.027337 \\ 1.597222 \\ 0.952381 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} [\text{m}] \quad (27)$$

5. Výpočet globálních vektorů výsledných koncových sil a jejich transformace do lokálního souřadného systému jednotlivých prutů. Výsledné koncové síly jsou rovny sekundárním koncovým silám, protože konstrukce neobsahuje zatížení na prutech (vektory primárních koncových sil jsou nulové).

$$R_{ab} = \hat{R}_{ab} \quad (28)$$

$$[R_{21}] = \begin{pmatrix} . & . & -45.36 & 60.48 \\ . & . & 60.48 & -80.64 \\ . & . & 45.36 & -60.48 \\ . & . & -60.48 & 80.64 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.027337 \\ 1.597222 \end{Bmatrix} \cdot 10^2 = \begin{Bmatrix} 5000 \\ -6666.\bar{6} \\ -5000 \\ 6666.\bar{6} \end{Bmatrix} [\text{N}]$$

Pozor na vliv zaokrouhlování! Při použití $\{r_{21}\} = \{0, 0, 103, 160\}^T \cdot 10^{-6}$ dostaneme vektor výsledných koncových sil $\{R_{21}\} = \{5004.72, -6672.96, -5004.72, 6672.96\}^T$.

$$[R_{13}] = \begin{pmatrix} 45.36 & 60.48 & -45.36 & . \\ 60.48 & 80.64 & -60.48 & . \\ -45.36 & -60.48 & 45.36 & . \\ -60.48 & -80.64 & 60.48 & . \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.027337 \\ 1.597222 \\ 0.952381 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^2 = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 13333.\bar{3} \\ -10000 \\ -13333.\bar{3} \end{Bmatrix} [N]$$

Pozor na vliv zaokrouhlování! Při použití $\{r_{13}\} = \{103, 160, 95, 0\}^T \cdot 10^{-6}$ dostaneme vektor výsledných koncových sil $\{R_{13}\} = \{10039.68, 13386.24, -10039.68, -13386.34\}^T$.

$$[R_{23}] = \begin{pmatrix} . & . & -105 & . \\ . & . & 0 & . \\ . & . & 105 & . \\ . & . & 0 & . \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.952381 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^2 = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \end{Bmatrix} [N]$$

Pozor na vliv zaokrouhlování! Při použití $\{r_{23}\} = \{0, 0, 95, 0\}^T \cdot 10^{-6}$ dostaneme vektor výsledných koncových sil $\{R_{23}\} = \{-9975, 0, 9975, 0\}^T$.

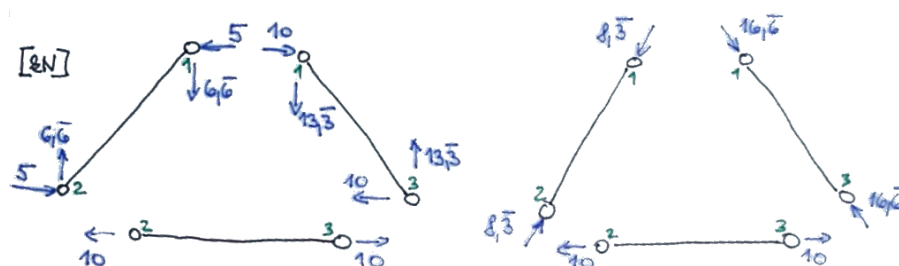
Síly v globálních vektorech výsledných koncových sil můžeme vykreslit přímo do příslušných styčníků a pomocí rozkladu sil získat osové síly na prutech, což je to samé jako provedení transformace:

$$R_{ab}^* = T_{ab} R_{ab} \quad (29)$$

$$\{R_{21}^*\} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 5000 \\ -6666.\bar{6} \\ -5000 \\ 6666.\bar{6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8333.\bar{3} \\ 0 \\ -8333.\bar{3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{R_{21}^*\} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 10000 \\ 13333.\bar{3} \\ -10000 \\ -13333.\bar{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16666.\bar{6} \\ 0 \\ -16666.\bar{6} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. Vykreslení vnitřních sil na konstrukci.

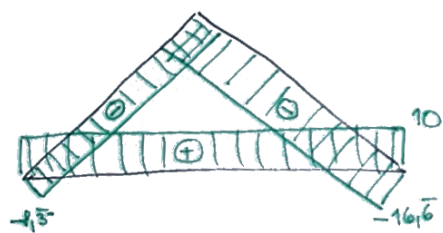


Obrázek 14: Globální a lokální výsledké koncové síly na jednotlivých prutech

Pozn. 1: Protože se jedná o jednoduchou staticky určitou konstrukci, můžete provést kontrolu výsledků pomocí styčnickové metody (viz Základy stavební mechaniky).

Pozn. 2: Pokud by se měly počítat pouze deformace, stačí vyčíslvat pouze šedá políčka matic tuhosti a primárních vektorů. Pokud se počítá celý příklad, je potřeba vyčíslit celé sloupce matic tuhosti náležící neznámým deformacím a celé primární vektory.

Pozn. 3: Pro výpočty sin a cos je obvykle (školní příklady) výhodnější zápis poměrem stran pravoúhlého trojúhelníku než přepočít přes úhel (obvykle pěkné zlomky $\Rightarrow$ menší zaokrouhlovací chyby).



Obrázek 15: Normálové síly příhradové konstrukce