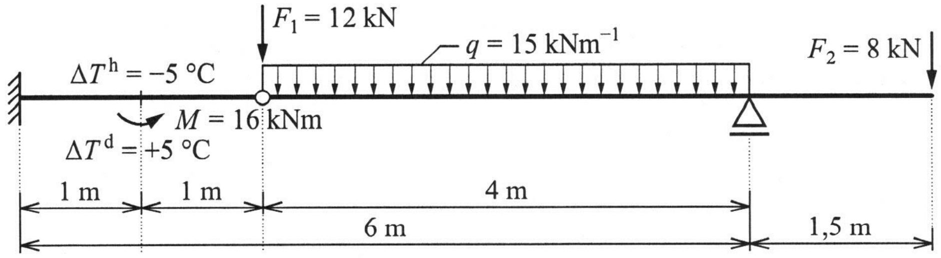
Příklad 2.7 Vyřešte nosník obecnou deformační metodou a vykreslete průběhy vnitřních sil.
$b \times h = 0{,}3 \times 0{,}4$ m, $E = 25$ GPa

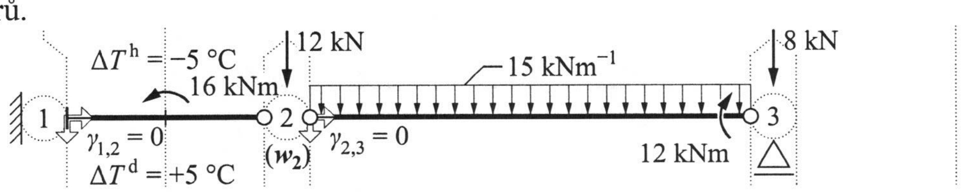


Dopočítané údaje: $M_0^q = \dfrac{1}{8} 15 \cdot 4^2 = 30$ kNm

Stupeň statické neurčitosti (1.5) $n_s = 0$ (nosníková soustava je staticky určitá)

Výpočtový model 2.7a – jeden neznámý parametr (w_2)

Zadaná změna teploty nevyvolá změnu délky prutu, ale způsobí pouze jeho ohyb. Vzhledem k absenci vodorovného zatížení jsou vodorovné posuny všech průřezů nulové. Zatížení převislého konce nahradíme ekvivalentní silou v uzlu a momentem na konci kloubově ukončeného prutu M_k = 12 kNm (zatížení konce prutu, viz schéma výpočtového modelu). Kloubem spojené pruty je možné modelovat jako kloubově ukončené, takže toto reálné pootočení konců prutů nelze zvoleným výpočtovým modelem zjistit. Kloub spojující oba pruty má pak pouze neznámý svislý posun, což odpovídá nejmenšímu počtu neznámých parametrů.



Stupeň přetvárné neurčitosti (1.6) $n_p = 1$ (neznámý parametr w_2)

Analýza prutů: $\boxed{\text{prut } 1\text{–}2}$ $l = 2$ m; $I = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ m^4, $E = 25 \cdot 10^6$ kPa; (1.8) $c = 1$; $s = 0$
(1.38) $\Delta T_0 = 0{,}5\,[(+5) + (-5)] = 0$ °C, $\Delta T_1 = (+5) - (-5) = 10$ °C

(8.3b)

$$[k_{1,2}] = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \mathbf{w_2} \\ 0 \end{array}\begin{array}{c} u_1 \; w_1 \; \varphi_1 \; u_2 \; \mathbf{w_2} \; 0 \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} \square & \square & \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & -15 & \square \\ \square & \square & \square & \square & 30 & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & \mathbf{15} & \square \\ \square & \square & \square & \square & 0 & \square \end{array}\right]\end{array} 10^3; \quad \{\overline{R}_{1,2}\} = \underset{(M)}{\overset{(8.1b/4)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -9 \\ 2 \\ \hline 0 \\ 9 \\ 0 \end{array}\right\}}} + \underset{(\Delta T)}{\overset{(8.1b/10)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -7{,}5 \\ 15 \\ \hline 0 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{array}\right\}}} = \begin{array}{c} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \mathbf{w_2} \\ 0 \end{array}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -16{,}5 \\ 17 \\ \hline 0 \\ \mathbf{16{,}5} \\ 0 \end{array}\right\}$$

Analýza prutů: $\boxed{\text{prut } 2\text{–}3}$ $l = 4$ m; $I = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ m^4, $E = 30 \cdot 10^6$ kPa; (1.8) $c = 1$; $s = 0$

(8.3d)

$$[k_{2,3}] = \begin{array}{c} \\ u_2 \\ \mathbf{w_2} \\ 0 \\ u_3 \\ w_3 \\ 0 \end{array}\begin{array}{c} u_2 \; \mathbf{w_2} \; 0 \; u_3 \; w_3 \; 0 \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \square & 0 & \square & \square & \square & \square \\ \square & \mathbf{0} & \square & \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & 0 & \square & \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square & \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square & \square & \square & \square \end{array}\right]\end{array} 10^3; \quad \{\overline{R}_{2,3}\} = \underset{(q)}{\overset{(8.1d/6)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -30 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -30 \\ 0 \end{array}\right\}}} + \underset{(M_k)}{\overset{(8.1d/5)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -3 \\ -12 \end{array}\right\}}} = \begin{array}{c} u_2 \\ \mathbf{w_2} \\ 0 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{array}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{-27} \\ 0 \\ \hline 0 \\ -33 \\ -12 \end{array}\right\}$$

Sestavení rovnice: neznámý parametr w_2 (1.15)

$[K] = [15+0]10^3 = [15]10^3$; $\{F\} = \{12\} - \{16{,}5 - 27\} = \{22{,}5\}$;

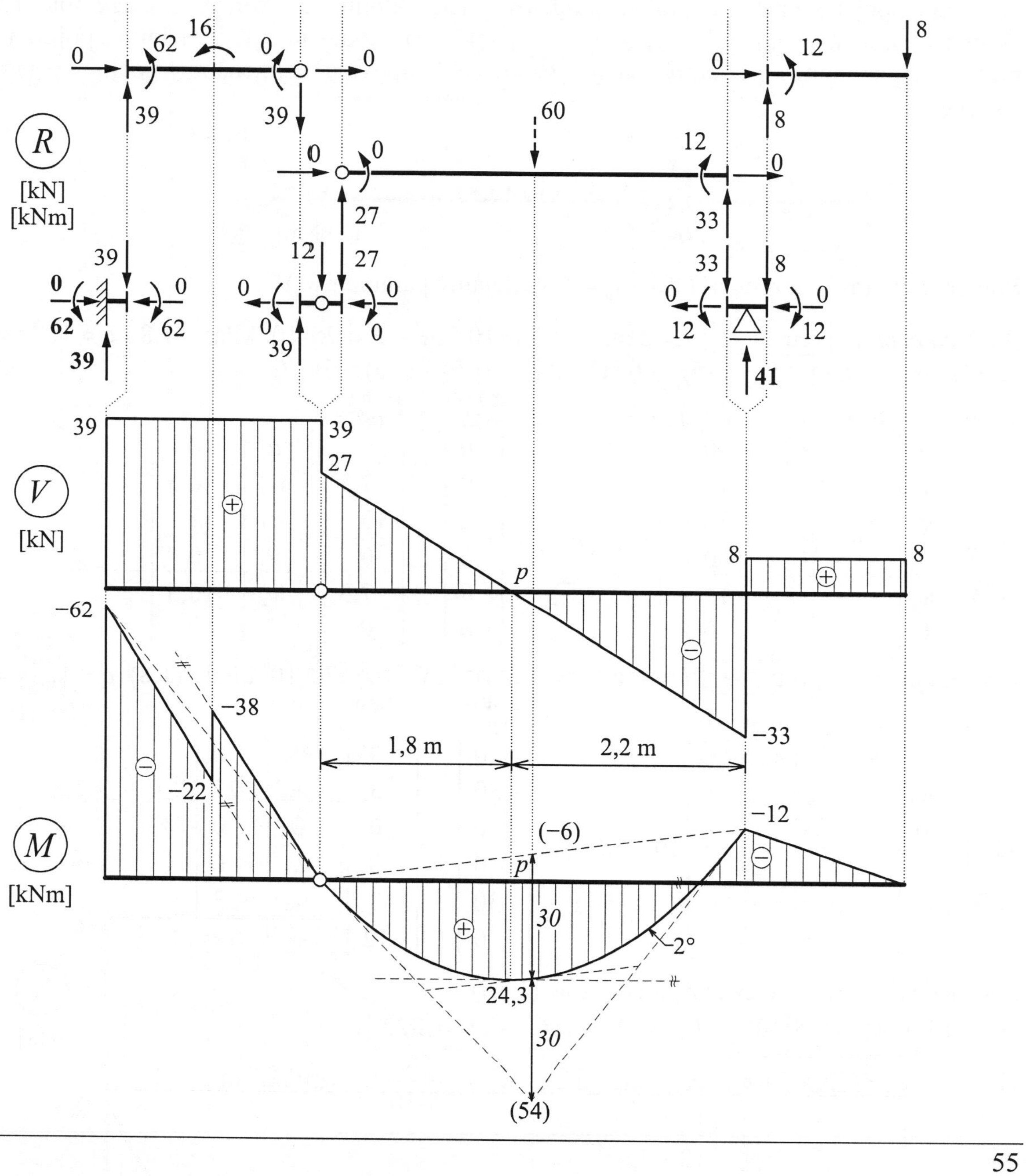
$[15]10^3\{w_2\} = \{22{,}5\}$; *Řešení:* (odst. 6.2): $w_2 = \dfrac{22{,}5}{15 \cdot 10^3} = \mathbf{1{,}5 \cdot 10^{-3}}$ m

Koncové síly prutů: globální (1.3)

$$\{R_{1,2}\}=\begin{Bmatrix} X_{1,2}\\ Z_{1,2}\\ M_{1,2}\\ \hdashline X_{2,1}\\ Z_{2,1}\\ M_{2,1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-16{,}5\\17\\ \hdashline 0\\16{,}5\\0\end{Bmatrix}+\left[\begin{array}{ccc:ccc}\square&\square&\square&\square&0&\square\\ \square&\square&\square&\square&-15&\square\\ \square&\square&\square&\square&30&\square\\ \hdashline \square&\square&\square&\square&0&\square\\ \square&\square&\square&\square&15&\square\\ \square&\square&\square&\square&0&\square\end{array}\right]10^3\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\ \hdashline 0\\1{,}5\\0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}0\\-39\\62\\ \hdashline 0\\39\\0\end{Bmatrix};$$

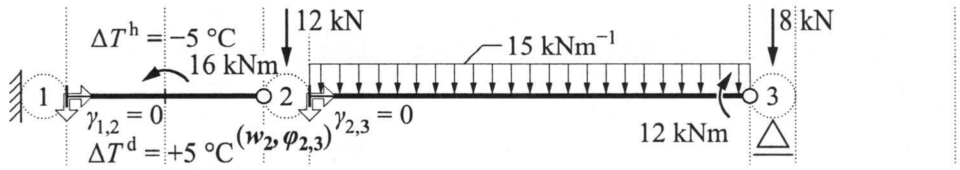
$$\{R_{2,3}\}=\begin{Bmatrix} X_{2,3}\\ Z_{2,3}\\ M_{2,3}\\ \hdashline X_{3,2}\\ Z_{3,2}\\ M_{3,2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\-27\\0\\ \hdashline 0\\-33\\-12\end{Bmatrix}+\left[\begin{array}{ccc:ccc}\square&0&\square&\square&\square&\square\\ \square&0&\square&\square&\square&\square\\ \square&0&\square&\square&\square&\square\\ \hdashline \square&0&\square&\square&\square&\square\\ \square&0&\square&\square&\square&\square\\ \square&0&\square&\square&\square&\square\end{array}\right]10^3\begin{Bmatrix}0\\1{,}5\\0\\ \hdashline 0\\0\\0\end{Bmatrix}10^{-3}=\begin{Bmatrix}0\\-27\\0\\ \hdashline 0\\-33\\-12\end{Bmatrix}$$

Koncové síly, reakce a průběhy vnitřních sil (normálové síly jsou nulové)



Výpočtový model 2.7b – dva neznámé parametry (w_2, $\varphi_{2,3}$)

S ohledem na zadanou změnu teploty a absenci vodorovného zatížení jsou vodorovné posuny nulové. Zatížení převislého konce, stejně jako v modelu *2.7a*, nahradíme ekvivalentní silou v uzlu a momentem na konci kloubově ukončeného prutu. Kloubem spojené pruty je možné modelovat jak kloubově tak tuze ukončené. Zde je uvedena varianta s neznámým pootočením konce pravého prutu. Při opačné volbě ukončení obou prutů lze hodnotu pootočení zkontrolovat podle modelu *2.7c*. Svislý posun kloubu zůstává stále neznámým parametrem.



Stupeň přetvárné neurčitosti (1.6) $n_p = 2$ (neznámé parametry w_2, $\varphi_{2,3}$)

Analýza prutů: $\boxed{\text{prut 1–2}}$ $l = 2$ m; $I = 1{,}6\cdot10^{-3}$ m^4, $E = 25\cdot10^6$ kPa; (1.8) $c = 1$; $s = 0$

(1.38) $\Delta T_0 = 0{,}5\,[(+5)+(-5)] = 0$ °C, $\Delta T_1 = (+5)-(-5) = 10$ °C

(8.3b)

$$[k_{1,2}] = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \boldsymbol{w_2} \\ 0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & w_1 & \varphi_1 & u_2 & \boldsymbol{w_2} & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} \square & \square & \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & -15 & \square \\ \square & \square & \square & \square & 30 & \square \\ \hdashline \square & \square & \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & \mathbf{15} & \square \\ \square & \square & \square & \square & 0 & \square \end{array}\right] \end{array} 10^3;\quad \{\overline{R}_{1,2}\} = \underset{(M)}{\overset{(8.1b/4)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -9 \\ 2 \\ \hdashline 0 \\ 9 \\ 0 \end{array}\right\}}} + \underset{(\Delta T)}{\overset{(8.1b/10)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -7{,}5 \\ 15 \\ \hdashline 0 \\ 7{,}5 \\ 0 \end{array}\right\}}} = \begin{array}{c} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \boldsymbol{w_2} \\ 0 \end{array}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -16{,}5 \\ 17 \\ \hdashline 0 \\ \mathbf{16{,}5} \\ 0 \end{array}\right\}$$

Analýza prutů: $\boxed{\text{prut 2–3}}$ $l = 4$ m; $I = 1{,}6\cdot10^{-3}$ m^4, $E = 30\cdot10^6$ kPa; (1.8) $c = 1$; $s = 0$

(8.3b)

$$[k_{2,3}] = \begin{array}{c} \\ u_2 \\ \boldsymbol{w_2} \\ \boldsymbol{\varphi_{2,3}} \\ u_3 \\ w_3 \\ 0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_2 & \boldsymbol{w_2} & \boldsymbol{\varphi_{2,3}} & u_3 & w_3 & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} \square & 0 & 0 & \square & \square & \square \\ \square & \mathbf{1{,}875} & \mathbf{-7{,}5} & \square & \square & \square \\ \square & \mathbf{-7{,}5} & \mathbf{30} & \square & \square & \square \\ \hdashline \square & 0 & 0 & \square & \square & \square \\ \square & -1{,}875 & 7{,}5 & \square & \square & \square \\ \square & 0 & 0 & \square & \square & \square \end{array}\right] \end{array} 10^3;\quad \{\overline{R}_{2,3}\} = \underset{(q)}{\overset{(8.1b/6)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -37{,}5 \\ 30 \\ \hdashline 0 \\ -22{,}5 \\ 0 \end{array}\right\}}} + \underset{(M_k)}{\overset{(8.1b/5)}{\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 4{,}5 \\ -6 \\ \hdashline 0 \\ -4{,}5 \\ -12 \end{array}\right\}}} = \begin{array}{c} u_2 \\ \boldsymbol{w_2} \\ \boldsymbol{\varphi_{2,3}} \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{array}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{-33} \\ \mathbf{24} \\ \hdashline 0 \\ -27 \\ -12 \end{array}\right\}$$

Soustava rovnic: neznámé parametry u_2, φ_2 (1.15) *Řešení* (odst. 6.2)

$$\begin{bmatrix} 16{,}875 & -7{,}5 \\ -7{,}5 & 30 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_{2,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 16{,}5-33 \\ 24 \end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_{2,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1{,}5} \\ \mathbf{-0{,}425} \end{Bmatrix} \mathbf{10^{-3}}$$

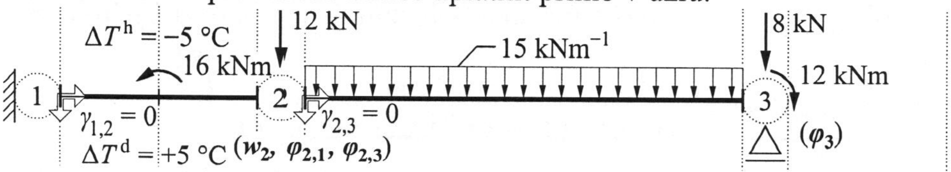
Koncové síly prutů: globální (1.3)

$$\{R_{1,2}\} = \left\{\begin{array}{c} X_{1,2} \\ Z_{1,2} \\ M_{1,2} \\ \hdashline X_{2,1} \\ Z_{2,1} \\ M_{2,1} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -16{,}5 \\ 17 \\ \hdashline 0 \\ 16{,}5 \\ 0 \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{ccc:ccc} \square & \square & \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & -15 & \square \\ \square & \square & \square & \square & 30 & \square \\ \hdashline \square & \square & \square & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & 15 & \square \\ \square & \square & \square & \square & 0 & \square \end{array}\right] 10^3 \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{array}\right\} 10^{-3} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -39 \\ 62 \\ \hdashline 0 \\ 39 \\ 0 \end{array}\right\};$$

$$\{R_{2,3}\} = \left\{\begin{array}{c} X_{2,3} \\ Z_{2,3} \\ M_{2,3} \\ \hdashline X_{3,2} \\ Z_{3,2} \\ M_{3,2} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -33 \\ 24 \\ \hdashline 0 \\ -27 \\ -12 \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{ccc:ccc} \square & 0 & 0 & \square & \square & \square \\ \square & 1{,}875 & -7{,}5 & \square & \square & \square \\ \square & -7{,}5 & 30 & \square & \square & \square \\ \hdashline \square & 0 & 0 & \square & \square & \square \\ \square & -1{,}875 & 7{,}5 & \square & \square & \square \\ \square & 0 & 0 & \square & \square & \square \end{array}\right] 10^3 \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1{,}5 \\ -0{,}425 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} 10^{-3} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -27 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ -33 \\ -12 \end{array}\right\}$$

Výpočtový model 2.7c – čtyři neznámé parametry (w_2, $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{2,3}$, φ_3)

Změna teploty s nulovou průměrnou hodnotou a neexistence vodorovného zatížení dává nulové vodorovné posuny. Tímto výpočtovým modelem při použití obou oboustranně tuze ukončených prutů získáme nejen svislý posun kloubu, ale i obě nezávislá pootočení konců prutů připojených do kloubu. V posuvné podpoře je neznámým parametrem pootočení, proto lze ekvivalentní náhradu převislého konce uplatnit přímo v uzlu.



Stupeň přetvárné neurčitosti (1.6) $\quad n_p = 4$ (neznámé parametry w_2, $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{2,3}$, φ_3)

Analýza prutů: $\boxed{\text{prut 1–2}}$ $l = 2$ m; $I = 1{,}6\cdot10^{-3}$ m^4, $E = 25\cdot10^6$ kPa; (1.8) $c = 1$; $s = 0$

(1.38) $\Delta T_0 = 0{,}5\,[(+5)+(-5)] = 0$ °C, $\Delta T_1 = (+5)-(-5) = 10$ °C

(8.3a)

$$[k_{1,2}] = \begin{array}{c} \\ u_1\\ w_1\\ \varphi_1\\ u_2\\ \mathbf{w_2}\\ \boldsymbol{\varphi_{2,1}} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \;\; w_1 \;\; \varphi_1 \;\; u_2 \;\; \mathbf{w_2} \;\; \boldsymbol{\varphi_{2,1}} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square & 0 & 0\\ \square & \square & \square & \square & -60 & -60\\ \square & \square & \square & \square & 60 & 40\\ \square & \square & \square & \square & 0 & 0\\ \square & \square & \square & \square & \mathbf{60} & \mathbf{60}\\ \square & \square & \square & \square & \mathbf{60} & \mathbf{80} \end{bmatrix}\end{array} 10^3;\quad \{\bar R_{1,2}\} = \underset{(M)}{\overset{(8.1a/4)}{\begin{Bmatrix} 0\\ -12\\ 4\\ 0\\ 12\\ 4 \end{Bmatrix}}} + \underset{(\Delta T)}{\overset{(8.1a/10)}{\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 10\\ 0\\ 0\\ -10 \end{Bmatrix}}} = \begin{array}{c} u_1\\ w_1\\ \varphi_1\\ u_2\\ \mathbf{w_2}\\ \boldsymbol{\varphi_{2,1}} \end{array} \begin{Bmatrix} 0\\ -12\\ 14\\ 0\\ \mathbf{12}\\ \mathbf{-6} \end{Bmatrix}$$

Analýza prutů: $\boxed{\text{prut 2–3}}$ $l = 4$ m; $I = 1{,}6\cdot10^{-3}$ m^4, $E = 30\cdot10^6$ kPa; (1.8) $c = 1$; $s = 0$

(8.3a)

$$[k_{2,3}] = \begin{array}{c} \\ u_2\\ \mathbf{w_2}\\ \boldsymbol{\varphi_{2,3}}\\ u_3\\ w_3\\ \boldsymbol{\varphi_3} \end{array} \begin{array}{c} u_2 \;\; \mathbf{w_2} \;\; \boldsymbol{\varphi_{2,3}} \;\; u_3 \;\; w_3 \;\; \boldsymbol{\varphi_3} \\ \begin{bmatrix} \square & 0 & 0 & \square & \square & 0\\ \square & \mathbf{7{,}5} & \mathbf{-15} & \square & \square & \mathbf{-15}\\ \square & \mathbf{-15} & \mathbf{40} & \square & \square & \mathbf{20}\\ \square & 0 & 0 & \square & \square & 0\\ \square & -7{,}5 & 15 & \square & \square & 15\\ \square & \mathbf{-15} & \mathbf{20} & \square & \square & \mathbf{40} \end{bmatrix}\end{array} 10^3;\quad \{\bar R_{2,3}\} = \begin{array}{c} u_2\\ \mathbf{w_2}\\ \boldsymbol{\varphi_{2,3}}\\ u_3\\ w_3\\ \boldsymbol{\varphi_3} \end{array} \underset{(q)}{\overset{(8.1a/6)}{\begin{Bmatrix} 0\\ \mathbf{-30}\\ \mathbf{20}\\ 0\\ -30\\ \mathbf{-20} \end{Bmatrix}}}$$

Soustava rovnic: neznámé parametry w_2, $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{2,3}$, φ_3 (1.15) *Řešení:* (odst. 6.2)

$$\begin{bmatrix} 67{,}5 & 60 & -15 & -15\\ 60 & 80 & 0 & 0\\ -15 & 0 & 40 & 20\\ -15 & 0 & 20 & 40 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} w_2\\ \varphi_{2,1}\\ \varphi_{2,3}\\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12\\ 0\\ 0\\ -12 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12-30\\ -6\\ 20\\ -20 \end{Bmatrix};\qquad \begin{Bmatrix} w_2\\ \varphi_{2,1}\\ \varphi_{2,3}\\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1{,}5}\\ \mathbf{-1{,}05}\\ \mathbf{-0{,}43}\\ \mathbf{0{,}98} \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Koncové síly prutů: globální (1.3)

$$\{R_{1,2}\} = \begin{Bmatrix} X_{1,2}\\ Z_{1,2}\\ M_{1,2}\\ X_{2,1}\\ Z_{2,1}\\ M_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\\ -12\\ 14\\ 0\\ 12\\ -6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square & 0 & 0\\ \square & \square & \square & \square & -60 & -60\\ \square & \square & \square & \square & 60 & 40\\ \square & \square & \square & \square & 0 & 0\\ \square & \square & \square & \square & 60 & 60\\ \square & \square & \square & \square & 60 & 80 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1{,}5\\ -1{,}05 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0\\ -39\\ 62\\ 0\\ 39\\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\{R_{2,3}\} = \begin{Bmatrix} X_{2,3}\\ Z_{2,3}\\ M_{2,3}\\ X_{3,2}\\ Z_{3,2}\\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\\ -30\\ 20\\ 0\\ -30\\ -20 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \square & 0 & 0 & \square & \square & 0\\ \square & 7{,}5 & -15 & \square & \square & -15\\ \square & -15 & 40 & \square & \square & 20\\ \square & 0 & 0 & \square & \square & 0\\ \square & -7{,}5 & 15 & \square & \square & 15\\ \square & -15 & 20 & \square & \square & 40 \end{bmatrix} 10^3 \begin{Bmatrix} 0\\ 1{,}5\\ -0{,}43\\ 0\\ 0\\ 0{,}98 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 0\\ -27\\ 0\\ 0\\ -33\\ -12 \end{Bmatrix}$$