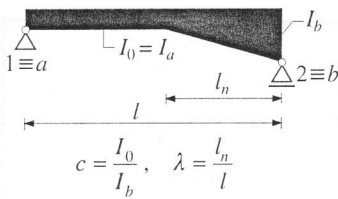


Tabulka 14.6. Deformační úhly α, β, φ prostého nosníku s jednostranným přímkovým náběhem

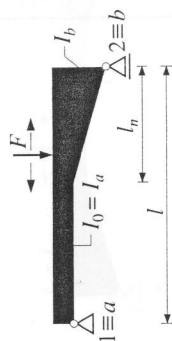
Absolutní hodnoty základních deformačních úhlů (obr. 4.8c, d)

$$\alpha_1 = \kappa_1 \frac{l}{EI_0}, \quad \alpha_2 = \kappa_2 \frac{l}{EI_0}, \quad \beta = \kappa_3 \frac{l}{EI_0}$$

a úhlů φ_1, φ_2 od spojitého rovnoměrného zatížení q po celé délce nosníku (obr. 4.8e)

$$\varphi_1 = k_1^* \frac{ql^3}{EI_0}, \quad \varphi_2 = k_2^* \frac{ql^3}{EI_0}$$

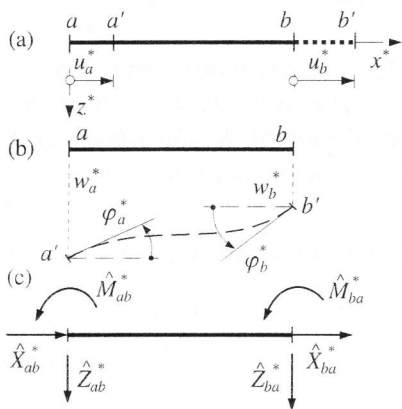
λ		0,10	0,20	0,30	0,40	1,00
c						
0,04	κ_1	0,3331	0,3318	0,3281	0,3210	0,1404
	κ_2	0,2627	0,2040	0,1562	0,1181	0,0279
	κ_3	0,1636	0,1551	0,1423	0,1264	0,0306
	k_1^*	0,0416	0,0410	0,0396	0,0372	0,0100
	k_2^*	0,0402	0,0365	0,0316	0,0260	0,0053
0,10	κ_1	0,3332	0,3321	0,3292	0,3236	0,1816
	κ_2	0,2725	0,2215	0,1794	0,1453	0,0573
	κ_3	0,1641	0,1572	0,1467	0,1335	0,0504
	k_1^*	0,0416	0,0411	0,0400	0,0381	0,0155
	k_2^*	0,0405	0,0374	0,0333	0,0287	0,0098
0,125	κ_1	0,3332	0,3322	0,3295	0,3244	0,1931
	κ_2	0,2756	0,2272	0,1870	0,1544	0,0681
	κ_3	0,1643	0,1578	0,1480	0,1356	0,0569
	k_1^*	0,0416	0,0412	0,0401	0,0383	0,0171
	k_2^*	0,0406	0,0377	0,0338	0,0295	0,0113
0,15	κ_1	0,3332	0,3323	0,3298	0,3250	0,2030
	κ_2	0,2786	0,2324	0,1940	0,1627	0,0785
	κ_3	0,1645	0,1583	0,1491	0,1375	0,0627
	k_1^*	0,0416	0,0412	0,0402	0,0386	0,0186
	k_2^*	0,0406	0,0380	0,0343	0,0302	0,0127
0,20	κ_1	0,3332	0,3324	0,3303	0,3260	0,2195
	κ_2	0,2837	0,2417	0,2066	0,1778	0,0980
	κ_3	0,1647	0,1593	0,1511	0,1407	0,0730
	k_1^*	0,0416	0,0413	0,0404	0,0390	0,0212
	k_2^*	0,0407	0,0384	0,0351	0,0314	0,0153
0,40	κ_1	0,3333	0,3328	0,3315	0,3289	0,2637
	κ_2	0,2999	0,2713	0,2471	0,2269	0,1668
	κ_3	0,1654	0,1620	0,1567	0,1501	0,1047
	k_1^*	0,0416	0,0414	0,0409	0,0400	0,0286
	k_2^*	0,0411	0,0396	0,0374	0,0350	0,0238
0,60	κ_1	0,3333	0,3330	0,3322	0,3307	0,2929
	κ_2	0,3126	0,2948	0,2796	0,2668	0,2269
	κ_3	0,1659	0,1639	0,1607	0,1567	0,1288
	k_1^*	0,0416	0,0415	0,0412	0,0407	0,0338
	k_2^*	0,0413	0,0404	0,0391	0,0377	0,0306

Tabulka 14.6. Deformační úhly α, β, φ prostého nosníku s jednostranným přímkovým náběhem (pokračování)

Absolutní hodnoty úhlů φ_1, φ_2 od břemene F (obr. 4.8f): $\varphi_1 = k_1 \frac{F l^2}{E I_0}$, $\varphi_2 = k_2 \frac{F l^2}{E I_0}$.

λ	c	k	Břemeno $F = 1$ v průřezu									
			0,1l	0,2l	0,3l	0,4l	0,5l	0,6l	0,7l	0,8l	0,9l	
1,0	1,00	k_1	0,0285	0,0480	0,0595	0,0640	0,0625	0,0560	0,0455	0,0320	0,0165	
		k_2	0,0165	0,0320	0,0455	0,0560	0,0625	0,0640	0,0595	0,0480	0,0285	
	0,20	k_1	0,0278	0,0465	0,0573	0,0611	0,0589	0,0516	0,0407	0,0278	0,0140	
		k_2	0,0139	0,0268	0,0377	0,0456	0,0495	0,0484	0,0418	0,0309	0,0167	
0,4	0,10	k_1	0,0275	0,0461	0,0566	0,0601	0,0576	0,0502	0,0391	0,0265	0,0133	
		k_2	0,0132	0,0254	0,0356	0,0427	0,0459	0,0441	0,0370	0,0256	0,0140	
	0,05	k_1	0,0273	0,0456	0,0560	0,0593	0,0566	0,0589	0,0378	0,0235	0,0128	
		k_2	0,0126	0,0242	0,0339	0,0405	0,0431	0,0407	0,0333	0,0233	0,0121	
	0,20	k_1	0,0282	0,0474	0,0586	0,0628	0,0610	0,0541	0,0433	0,0298	0,0151	
		k_2	0,0149	0,0289	0,0408	0,0498	0,0547	0,0546	0,0486	0,0362	0,0195	
0,3	0,10	k_1	0,0281	0,0472	0,0583	0,0624	0,0605	0,0535	0,0426	0,0291	0,0146	
		k_2	0,0145	0,0280	0,0395	0,0480	0,0525	0,0520	0,0455	0,0330	0,0174	
	0,05	k_1	0,0280	0,0470	0,0580	0,0620	0,0600	0,0530	0,0420	0,0285	0,0143	
		k_2	0,0142	0,0273	0,0385	0,0466	0,0508	0,0499	0,0431	0,0306	0,0158	
	0,20	k_1	0,0284	0,0478	0,0592	0,0636	0,0620	0,0555	0,0449	0,0313	0,0159	
		k_2	0,0158	0,0305	0,0433	0,0530	0,0588	0,0596	0,0543	0,0421	0,0230	
0,2	0,10	k_1	0,0284	0,0478	0,0591	0,0635	0,0619	0,0553	0,0447	0,0310	0,0157	
		k_2	0,0156	0,0301	0,0426	0,0522	0,0577	0,0583	0,0528	0,0404	0,0215	
	0,05	k_1	0,0284	0,0477	0,0591	0,0634	0,0618	0,0551	0,0445	0,0308	0,0155	
		k_2	0,0154	0,0298	0,0422	0,0515	0,0569	0,0573	0,0517	0,0391	0,0204	

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ Z_{ab,0}^* - \frac{(\alpha_{ba} + \beta) \varphi_{ab} - (\alpha_{ab} + \beta) \varphi_{ba}}{(\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2) l} \\ \frac{\varphi_{ab} \alpha_{ba} - \varphi_{ba} \beta}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2} \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ Z_{ba,0}^* + \frac{(\alpha_{ba} + \beta) \varphi_{ab} - (\alpha_{ab} + \beta) \varphi_{ba}}{(\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2) l} \\ \frac{\varphi_{ab} \beta - \varphi_{ba} \alpha_{ab}}{\alpha_{ab} \alpha_{ba} - \beta^2} \end{Bmatrix}, \quad (11.33)$$



Obr. 11.11. Sekundární stav prutu oboustranně monoliticky připojeného

který obsahuje deformační součinitele $\delta_1, \alpha_{ab}, \alpha_{ba}, \beta$ charakterizující samotný (nezatížený) prut, deformační součinitele $\delta_0, \varphi_{ab}, \varphi_{ba}$ prutu závislé na konkrétním zatížení, zatěžovací účinky $R, Z_{ab,0}^*, Z_{ba,0}^*$ silového zatížení na náhradním prostém nosníku a geometrickou hodnotu – délku prutu l .

V **sekundárním stavu** uvažujeme nezatížený prut (obr. 11.11). Oběma koncům prutu (uzlům) a, b udělíme lokální složky parametrů deformace, které analogicky k (11.24) tvoří vektor lokálních parametrů deformace prutu

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, \varphi_a^*, u_b^*, w_b^*, \varphi_b^*\}^T. \quad (11.34)$$

To způsobí přetvoření prutu a vyvolá vnitřní síly v prutu. Na koncích a, b prutu vzniknou sekundární lokální složky koncových sil, které analogicky s (11.25) sestavíme do sekundárního vektoru koncových sil

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \{\hat{X}_{ab}^*, \hat{Z}_{ab}^*, \hat{M}_{ab}^*, \hat{X}_{ba}^*, \hat{Z}_{ba}^*, \hat{M}_{ba}^*\}^T. \quad (11.35)$$

Složky vektoru (11.35) vyjádříme podle (11.18) jako lineární funkce lokálních složek parametrů deformace. Tuto závislost zapíšeme maticově

$$\hat{\mathbf{R}}_{ab}^* = \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^*, \quad (11.36)$$

kde $\mathbf{k}_{ab}^*$ je *lokální matice tuhosti oboustranně upnutého prutu*. Vzhledem k analýze prutu v lokální souřadnicové soustavě a možnosti vyšetřovat samostatně vliv osových posunů u_a^*, u_b^* (obr. 11.11a) a příčných posunů w_a^*, w_b^* s pootočeními φ_a^*, φ_b^* konců a, b prutu, budou některé prvky lokální matice tuhosti $\mathbf{k}_{ab}^*$ nulové. Platí obecně

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} \\ 0 & \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & \frac{\alpha_{ba}}{D} & 0 \\ \hline -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & \frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} & \frac{\beta}{D} & 0 \end{array} \right], \quad (11.48)$$

kde D je hodnota determinantu soustavy (11.42) resp. (11.45)

$$D = \alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2. \quad (11.49)$$

Matice tuhosti (11.48) je *symetrická*, což je důsledkem Bettiho věty o vzájemnosti virtuálních prací (viz odstavce 1.1.5 a 1.1.6). Matice (11.48) obsahuje sedm různých členů (bez ohledu na znaménka), které jsou vyjádřeny pomocí deformačních součinitelů δ_1 , α_{ab} , α_{ba} , β a délky prutu l . Základní deformační součinitele reprezentují přetvárné vlastnosti prutu, vyšetřované na prostém nosníku jako základní soustavě (viz odstavec 4.1). Nezávisí tedy na způsobu připojení prutu do rámové konstrukce.

Pro obecně proměnný průřez prutu ab lze numerické hodnoty deformačních součinitelů určit podle vztahu (1.36) numerickou integrací. Lokální matice tuhosti pro nejběžnější případ prutu konstantního průřezu (prismatický prut) je odvozena v odstavci 11.2.6 a pro prut s přímkovým náběhem v odstavci 11.2.7.

11.2.3. Prut jednostranně kloubově připojený

Kloubové připojení pravého konce b prutu ab (obr. 11.13a) je charakterizováno tím, že pravá výsledná momentová složka je nulová ($M_{ba}^* = 0$). Rovněž primární a sekundární část momentu musí být nulová, takže platí $\bar{M}_{ba}^* = 0$ (obr. 11.13c) a $\hat{M}_{ba}^* = 0$. Primární vektor (11.25) se změní na tvar

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \left\{ \bar{X}_{ab}^*, \bar{Z}_{ab}^*, \bar{M}_{ab}^*, \bar{X}_{ba}^*, \bar{Z}_{ba}^*, 0 \right\}^T. \quad (11.50)$$

Kloubově připojený konec prutu nemění chování prutu při osovém zatížení (srovnej obr. 11.8b a obr. 11.13b s obr. 11.9). Vztahy (11.27) a (11.30) zůstávají v platnosti.

Pro příčné zatížení zůstane ze soustavy (11.28) pouze jediná podmínka

$$-\bar{M}_{ab}^* \alpha_{ab} + \varphi_{ab} = 0, \quad (11.51)$$

odkud získáme primární koncový moment

$$k_{ab}^* = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} \\ 0 & -\frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & \frac{\alpha_{ba}}{D} & 0 & \frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & \frac{\beta}{D} \\ \hline -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & \frac{\alpha_{ba} + \beta}{Dl} & 0 & \frac{\alpha_{ab} + \alpha_{ba} + 2\beta}{Dl^2} & \frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} \\ 0 & -\frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} & \frac{\beta}{D} & 0 & \frac{\alpha_{ab} + \beta}{Dl} & \frac{\alpha_{ab}}{D} \end{array} \right], \quad (11.48)$$

kde D je hodnota determinantu soustavy (11.42) resp. (11.45)

$$D = \alpha_{ab}\alpha_{ba} - \beta^2. \quad (11.49)$$

Matice tuhosti (11.48) je *symetrická*, což je důsledkem Bettiho věty o vzájemnosti virtuálních prací (viz odstavce 1.1.5 a 1.1.6). Matice (11.48) obsahuje sedm různých členů (bez ohledu na znaménka), které jsou vyjádřeny pomocí deformačních součinitelů δ_1 , α_{ab} , α_{ba} , β a délky prutu l . Základní deformační součinitele reprezentují přetvárné vlastnosti prutu, vyšetřované na prostém nosníku jako základní soustavě (viz odstavec 4.1). Nezávisí tedy na způsobu připojení prutu do rámové konstrukce.

Pro obecně proměnný průřez prutu ab lze numerické hodnoty deformačních součinitelů určit podle vztahu (1.36) numerickou integrací. Lokální matice tuhosti pro nejběžnější případ prutu konstantního průřezu (prismatický prut) je odvozena v odstavci 11.2.6 a pro prut s přímkovým náběhem v odstavci 11.2.7.

11.2.3. Prut jednostranně kloubově připojený

Kloubové připojení pravého konce b prutu ab (obr. 11.13a) je charakterizováno tím, že pravá výsledná momentová složka je nulová ($M_{ba}^* = 0$). Rovněž primární a sekundární část momentu musí být nulová, takže platí $\bar{M}_{ba}^* = 0$ (obr. 11.13c) a $\hat{M}_{ba}^* = 0$. Primární vektor (11.25) se změní na tvar

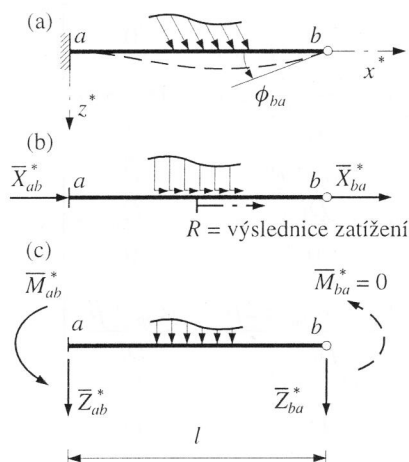
$$\bar{\mathbf{R}}^* = \{ \bar{X}_{ab}^*, \bar{Z}_{ab}^*, \bar{M}_{ab}^*, \bar{X}_{ba}^*, \bar{Z}_{ba}^*, 0 \}^T. \quad (11.50)$$

Kloubově připojený konec prutu nemění chování prutu při osovém zatížení (srovnej obr. 11.8b a obr. 11.13b s obr. 11.9). Vztahy (11.27) a (11.30) zůstávají v platnosti.

Pro příčné zatížení zůstane ze soustavy (11.28) pouze jediná podmínka

$$-\bar{M}_{ab}^* \alpha_{ab} + \varphi_{ab} = 0, \quad (11.51)$$

odkud získáme primární koncový moment



Obr. 11.13. Primární stav prutu pravostranně kloubově připojeného

$$\bar{M}_{ab}^* = \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab}}. \quad (11.52)$$

Pootočení $\phi_{ba} \neq 0$ u kloubového konce b (obr. 11.13a) v případě jednostranně kloubově připojeného prutu neuvažujeme jako neznámý parametr deformace, neboť poddajnost prutu je již vyjádřena s ohledem na kloubové ukončení. Pak smluvně pokládáme pootočení u kloubového konce b za nulové a ani přetvárnou podmínku pro konec b nesestavujeme. Primární příčné síly $\bar{Z}_{ab}^*$ a $\bar{Z}_{ba}^*$ stanovíme ze vztahů (11.31) pro primární momentový doplněk

$$\Delta \bar{M} = \frac{1}{l} \bar{M}_{ab}^* = \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} l}. \quad (11.53)$$

Z výrazů (11.30), (11.31) a (11.53), (11.27) sestavíme **primární vektor pravostranně kloubově připojeného prutu obecně proměnného průřezu** ve tvaru

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ \bar{M}_{ab}^* \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ Z_{ab,0}^* - \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} l} \\ \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab}} \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ Z_{ba,0}^* + \frac{\varphi_{ab}}{\alpha_{ab} l} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11.54)$$

Při deformačním zatížení se pravostranně kloubově připojený prut zdeformuje, koncové pootočení $\varphi_b^* \neq 0$, ale neuvažuje se jako neznámý parametr deformace. Podle (11.34) zapíšeme vektor lokálních parametrů deformace prutu jako

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, \varphi_a^*, u_b^*, w_b^*, 0\}^T. \quad (11.55)$$

Lokální matice tuhosti (11.37) se pro tento případ rovněž upraví. Ve srovnání s obr. 11.12 se nesleduje šestý jednotkový stav. Prvky šestého řádku matice (11.37) jsou nulové vzhledem k šestému prvku vektoru (11.54) a prvky šestého sloupce se obsadí nulami kvůli hodnotě posledního prvku vektoru (11.55). První a čtvrtý stav na obr. 11.12a,d se nemění, takže výrazy (11.39) a (11.40) zůstávají v platnosti, stejně jako odpovídající řádky a sloupce v (11.37). Zbývající tři jednotkové stavy je nutné vyřešit.

U *druhého deformačního stavu* (obr. 11.14a) určíme koncovou momentovou složku k_{32}^* z první rovnice (11.42) s uvažněním $k_{62}^* = 0$, takže

$$-k_{32}^* \alpha_{ab} = \frac{1}{l} \quad (11.56)$$

a odtud

$$k_{32}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab} l}. \quad (11.57)$$

Podle (11.44) je

$$k_{22}^* = -k_{52}^* = -\frac{1}{l} k_{32}^* = \frac{1}{\alpha_{ab} l^2}. \quad (11.58)$$

Pro *třetí deformační stav* (obr. 11.14b) využijeme první rovnici (11.45)

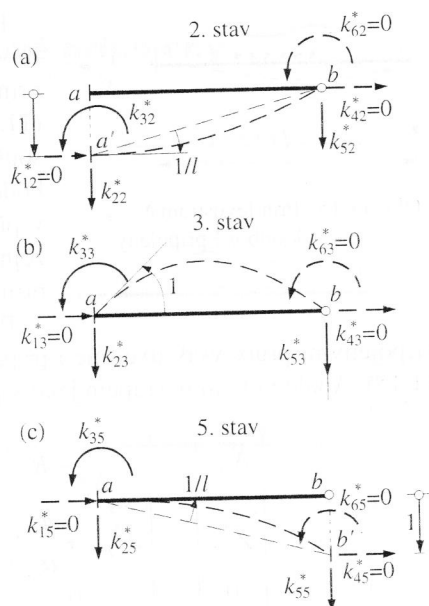
$$-k_{33}^* \alpha_{ab} = -1, \quad (11.59)$$

z níž získáme

$$k_{33}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab}}. \quad (11.60)$$

Podle (11.47) platí

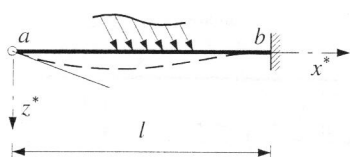
$$k_{23}^* = -k_{53}^* = -\frac{1}{l} k_{33}^* = -\frac{1}{\alpha_{ab} l}. \quad (11.61)$$



Obr. 11.14. Jednotkové deformační stavy pravostranně kloubově připojeného prutu

Vyšetření *pátého deformačního stavu* (obr. 11.14c) je analogické s řešením druhého stavu. **Lokální matice tuhosti pravostranně kloubově připojeného prutu obecně proměnného průřezu má tvar**

$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{ab} l^2} & -\frac{1}{\alpha_{ab} l} & 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab} l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab} l} & \frac{1}{\alpha_{ab}} & 0 & \frac{1}{\alpha_{ab} l} & 0 \\ -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ab} l^2} & \frac{1}{\alpha_{ab} l} & 0 & \frac{1}{\alpha_{ab} l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.62)$$



Obr. 11.15. Prut jednostranně kloubově připojený

Pro aplikaci prutu jednostranně kloubově připojeného do stěničky nebo do podpory vystačíme s odvozeným primárním vektorem (11.54) a lokální maticí tuhosti (11.62). Vždy lze takový prut ab umístit do lokální souřadnicové soustavy $x^* z^*$ tak, aby kloub byl koncovým bodem b (obr. 11.13a). Tento způsob řešení je ilustrován v příkladu 11.4 (obr. 11.37d). Musí se přitom dodržet zejména konvence silového zatížení pro sestavení primárního zatěžovacího vektoru (11.54).

Pro větší komfort při práci s jednostranně kloubově připojenými pruty však uvedme i případ **levostranně kloubově připojeného prutu** (obr. 11.15). Analogickým postupem jako v předchozím případě získáme primární vektor

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ 0 \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ \bar{M}_{ba}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ Z_{ab,0}^* + \frac{\varphi_{ba}}{\alpha_{ba} l} \\ 0 \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ Z_{ba,0}^* - \frac{\varphi_{ba}}{\alpha_{ba} l} \\ -\frac{\varphi_{ba}}{\alpha_{ba}} \end{Bmatrix}, \quad (11.63)$$

vektor lokálních parametrů deformace

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, 0, u_b^*, w_b^*, \varphi_b^*\}^T \quad (11.64)$$

a lokální matici tuhosti

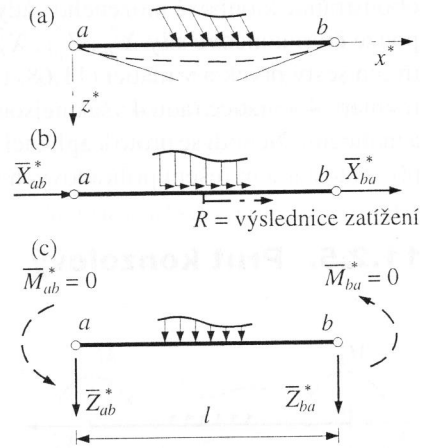
$$\mathbf{k}_{ab}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & -\frac{1}{\alpha_{ba} l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 & \frac{1}{\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{ba} l^2} & \frac{1}{\alpha_{ba} l} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha_{ba} l} & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{ba} l} & \frac{1}{\alpha_{ba}} \end{bmatrix}. \quad (11.65)$$

11.2.4. Prut oboustranně kloubově připojený

Kloubové připojení obou konců a, b prutu (obr. 11.16a) představuje obě koncové momentové složky nulové, tedy $M_{ab}^* = M_{ba}^* = 0$.

V primárním stavu při osovém zatížení (obr. 11.16b) se prut chová stejně jako v obou předchozích případech a platí vztahy (11.27) a (11.30). Příčné zatížení (obr. 11.16c) nevyvolá momentové složky, takže $\Delta M = 0$ a příčné složky podle (11.31) se rovnají složkám na prostém nosníku, tj. $\bar{Z}_{ab}^* = Z_{ab,0}^*$ a $\bar{Z}_{ba}^* = Z_{ba,0}^*$. **Primární vektor oboustranně kloubově připojeného prutu proměnného průřezu má tvar**

$$\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ab}^* \\ \bar{Z}_{ab}^* \\ 0 \\ \bar{X}_{ba}^* \\ \bar{Z}_{ba}^* \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_0}{\delta_1} - R \\ Z_{ab,0}^* \\ 0 \\ -\frac{\delta_0}{\delta_1} \\ Z_{ba,0}^* \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11.66)$$



Obr. 11.16. Primární stav prutu oboustranně kloubově připojeného

U příhradové konstrukce jsou většinou pruty nezátížené, neboť se uvažuje pouze styčnickové zatížení. V takovém případě je pak primární vektor (11.66) nulový $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^* = \mathbf{0}$.

Koncová pootočení $\varphi_a^* \neq 0$, $\varphi_b^* \neq 0$ se neuvažují jako neznámé parametry, takže vektor lokálních parametrů deformace je

$$\mathbf{r}_{ab}^* = \{u_a^*, w_a^*, 0, u_b^*, w_b^*, 0\}^T. \quad (11.67)$$

V lokální matici tuhosti jsou nenulové prvky pouze od vlivu osových deformací. Prvky vyvolané příčným zatížením jsou nulové, protože prostý nosník se nedeformuje vlivem koncového příčného posunutí či pootočení. **Lokální matice tuhosti oboustranně kloubově připojeného prutu proměnného průřezu má pak velmi jednoduchý tvar**

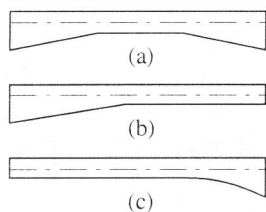
$$\mathbf{k}_{ab}^* = \frac{1}{\delta_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.68)$$

Dosazením výrazů (11.69), (11.70), (11.74) až (11.76) do obecně vyjádřených primárních vektorů (11.33) resp. (11.54) sestavíme vektory primárních koncových sil $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*$, uvedené pro oba způsoby připojení prutu ke styčnickům jako případ (a) v tabulce 11.2. V této tabulce jsou uvedeny primární vektory pro další tři nejčastější případy zatížení. Pro jiné případy zatížení a způsoby uložení lze primární vektory $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*$ získat z obecných vztahů (11.33), (11.54), (11.63) či (11.66) určením osových deformačních parametrů δ_1 podle (11.69) a δ_0 podle (11.74). Deformační úhly α, β, φ lze získat podle tabulek 14.2, 14.6, 14.7 nebo je možné přímo využít koncových příčných a momentových složek z tabulek 14.10, 14.11 s přizpůsobením konvence dle obr. 11.8c.

Vyjádříme-li deformační součinitele $\delta_1, \alpha_{ab}, \alpha_{ba}, \beta$ prizmatického prutu pomocí vztahů (11.69), (11.70), můžeme převést obecně sestavené lokální matice tuhosti (11.48), (11.62), (11.65) a (11.68) pro různé způsoby připojení prutu ke styčnickům na tvary často používané při numerickém řešení prutových soustav. Matice jsou přehledně uvedeny v tabulce 11.3, kde nulové parametry vyznačené v obrázcích vyjadřují tu skutečnost, že se parametr (reálné nenulový) neuvažuje jako neznámá veličina.

11.2.7. Prut s přímkovým náběhem

Většina rámových konstrukcí je tvořena pruty s konstantním průřezem. U některých typů prutových soustav, např. spojitých nosníků apod., je výhodné použít *pruty proměnného průřezu*. Realizují se různé případy náběhů (obr. 11.18), a to u konců prutů monoliticky



Obr. 11.18. Pruty s výškovými náběhy

připojených do styčníků. Nejčastěji se jedná o *výškové náběhy*, které jsou staticky účinnější než *šířkové náběhy*. Pro pruty oboustranně monoliticky připojené jsou vhodné oboustranné symetrické náběhy (obr. 11.18a) a pro pruty jednostranně kloubově připojené pak náběhy jednostranné (obr. 11.18b, c). U prutů s výškovými náběhy se výška průřezu zvětšuje většinou na spodní stranu od původní osy. V tom případě se zakřivuje i střednice prutu. Její mírné zakřivení má zanedbatelný vliv na výsledky řešení, proto se pruty s výškovými náběhy ve výpočtech obvykle uvažují jako přímé.

Pro pruty s náběhy platí podle způsobu uložení obecné tvary (11.33), (11.54), (11.63), (11.66) pro primární vektor $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*$ a (11.48), (11.62), (11.65), (11.68) pro lokální matici tuhosti $\mathbf{k}_{ab}^*$. Jejich konkrétní vyjádření závisí na určení základních deformačních součinitelů. Zcela obecné případy lze řešit numerickou integrací, např. pomocí Simpsonova pravidla [2]. Pro nejběžnější typy náběhů a jednoduché případy zatížení jsou v odborné literatuře uvedeny tabulky koeficientů, umožňující přímé vyčíslení základních deformačních součinitelů a vyjádření příslušného primárního vektoru i lokální matice tuhosti. Ukázka takových tabulek pro jednostranné a oboustranné symetrické přímkové náběhy je v kapitole 14 (tabulky 14.6 a 14.7).

Každý prut s náběhy lze pomocí dalšího uměle vloženého styčnicku rozdělit na část s konstantním průřezem a na část pouze s náběhem (viz příklad 11.6). Pro nejčastější případ

prutu s výškovým přímkovým náběhem (obr. 11.19) zatíženého plným spojitým osovým i příčným zatížením odvodíme [23] explicitní výrazy pro základní deformační součinitele.

Uvažujme funkci pro změnu výšky průřezu

$$h(x^*) = \frac{h_0}{l}(l + cx^* - x^*) \quad (11.77)$$

při konstantní šířce b prutu se součinitelem výškové změny $c > 1$. Tomu odpovídá funkce osově tuhosti

$$EA(x^*) = \frac{EA_0}{l}(l + cx^* - x^*) \quad (11.78)$$

a funkce ohybové tuhosti

$$EI(x^*) = \frac{EI_0}{l^3}(l + cx^* - x^*)^3. \quad (11.79)$$

Pro základní deformační součinitele prutu ab s přímkovým náběhem pak po úpravě příslušných členů Maxwellova-Mohrova vztahu (1.36) resp. (1.37) vycházejí explicitní výrazy

$$\delta_1 = \int_0^l \frac{dx^*}{EA(x^*)} = \frac{l}{EA_0} \cdot \frac{\ln c}{c-1}, \quad (11.80)$$

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{(l-x^*)^2}{EI(x^*)} dx^* = \frac{l}{EI_0} \cdot \frac{1}{(c-1)^3} \left(\ln c + \frac{c^2}{2} - 2c + \frac{3}{2} \right), \quad (11.81)$$

$$\alpha_{ba} = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^{*2}}{EI(x^*)} dx^* = \frac{l}{EI_0} \cdot \frac{1}{(c-1)^3} \left(\ln c + \frac{2}{c} - \frac{1}{2c^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (11.82)$$

$$\beta = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^*(l-x^*)}{EI(x^*)} dx^* = \frac{l}{EI_0} \cdot \frac{1}{(c-1)^3} \left(\frac{c}{2} - \ln c - \frac{1}{2c} \right). \quad (11.83)$$

Pro funkci normálové síly od spojitého osového zatížení $n = \text{konst.}$ (obr. 11.19) platí

$$N(x^*) = n(l - x^*), \quad (11.84)$$

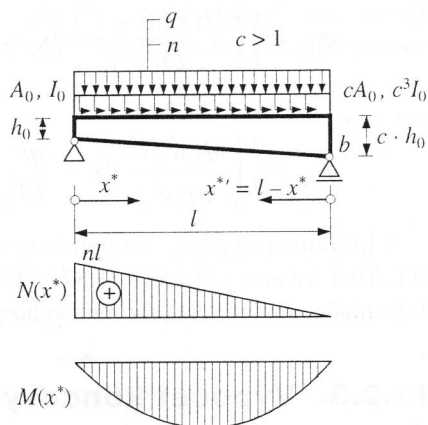
takže

$$\delta_0 = \int_0^l \frac{N(x^*)}{EA(x^*)} dx^* = \frac{nl^2}{EA_0} \cdot \frac{1}{c-1} \left(\frac{c}{c-1} \ln c - 1 \right). \quad (11.85)$$

Pro příčné spojitě rovnoměrné zatížení $q = \text{konst.}$ je funkce ohybového momentu $M(x^*)$ dána vztahem

$$M(x^*) = \frac{q}{2}(lx^* - x^{*2}) = \frac{q}{2}x^*(l - x^*), \quad (11.86)$$

tedy



Obr. 11.19. Prut s lineární změnou výšky průřezu

$$\varphi_{ab} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M(x^*)(l-x^*)}{EI(x^*)} dx^* = \frac{ql^3}{EI_0} \cdot \frac{1}{2(c-1)^4} \left[\frac{c^2}{2} + 2c - (2c+1) \ln c - \frac{5}{2} \right], \quad (11.87)$$

$$\varphi_{ba} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M(x^*)x^*}{EI(x^*)} dx^* = \frac{ql^3}{EI_0} \cdot \frac{1}{2(c-1)^4} \left[(c+2) \ln c - \frac{5}{2}c + \frac{1}{2c} + 2 \right]. \quad (11.88)$$

V limitním případě $c \rightarrow 1$ přejdou výrazy (11.80) až (11.83) na jednodušší vztahy (11.69), (11.70) a rovnice (11.85), (11.87), (11.88) se zjednoduší na (11.74), (11.75), které určují deformační součinitele prizmatického prutu.

11.2.8. Výpočet koncových sil a průběhy vnitřních sil

Účinek silového zatížení i deformací v koncích prutu ab byl v předchozích odstavcích vyšetřován odděleně formou primárních (11.25) a sekundárních (11.35) částí. Jejich superpozicí získáme výsledné koncové síly, které s použitím (11.36) vyjádříme maticovou rovnicí

$$\bullet \quad \mathbf{R}_{ab}^* = \bar{\mathbf{R}}_{ab}^* + \mathbf{k}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}^*, \quad (11.89)$$

kde vektor $\mathbf{R}_{ab}^*$ analogický s (11.21) přísluší výsledným *lokálním* složkám koncových sil prutu ab .

Známe-li velikost složek vektoru $\mathbf{r}_{ab}^*$ parametrů deformace na prutu ab v lokální souřadnicové soustavě x^*z^* (pojďme o tom až v odstavci 11.3), můžeme pomocí vektoru lokálních primárních koncových sil $\bar{\mathbf{R}}_{ab}^*$ a lokální matice tuhosti $\mathbf{k}_{ab}^*$ určit šest hledaných složek vektoru $\mathbf{R}_{ab}^*$. Tyto složky necháme působit na uvolněném prutu jako *koncové reakce*. Společně s daným silovým zatížením prutu tak známe všechny síly (i momenty) působící na uvolněný prut. Postupem podrobně probraným v odstavci 11.5 [19] pak můžeme na prutu vypočítat a vykreslit **průběhy vnitřních sil**.

Po stanovení průběhů vnitřních sil lze určit i pružnou **deformaci prutu**, např. metodami uvedenými v kapitole 1. Vyšetřovaný prut přitom považujeme za prostý event. za konzolový nosník v lokální souřadnicové soustavě x^*z^* . Řešíme tak *relativní* posuny (v ose prutu x^* a kolmo na ni), event. pootočení v zadaném průřezu prutu.

Je-li potřebné zjistit *celkovou deformaci* některého průřezu, vztaženou ke globální souřadnicové soustavě xz , je nutné k pružné lokální deformaci (po transformaci) přičíst ještě posuny a pootočení prutu jako tuhého celku vlivem přetvoření koncových bodů (i připojených uzlů). Rovněž lze, i když s větším počtem neznámých, tento případ řešit vložením dalšího styčníku do místa vyšetřovaného průřezu.

11.2.9. Transformace do globálního souřadnicového systému

V běžné prutové konstrukci mohou být pruty uspořádány zcela libovolně. Změnu geometrického tvaru celé prutové konstrukce popisujeme v globální souřadnicové soustavě