STATIKA I.

CV. 5_1 : METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC (MTR)

MTR - je variantou silové metody pro řešení spojitých nosníků
- základní soustavou je řada prostých nosníků (vložením vnitřních kloubů do vnitřních podpor a vetknutí)

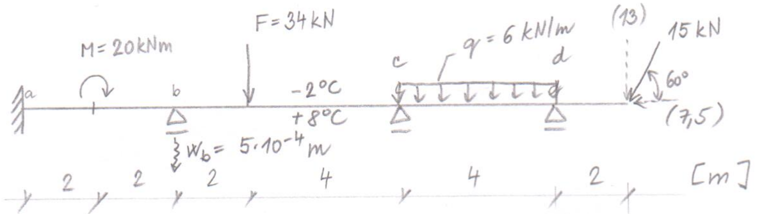
Př.: Řešte daný spojitý nosník MTR.

$E = 25\,GPa$

$b = 0{,}375\,m$

$h = 0{,}4\,m$

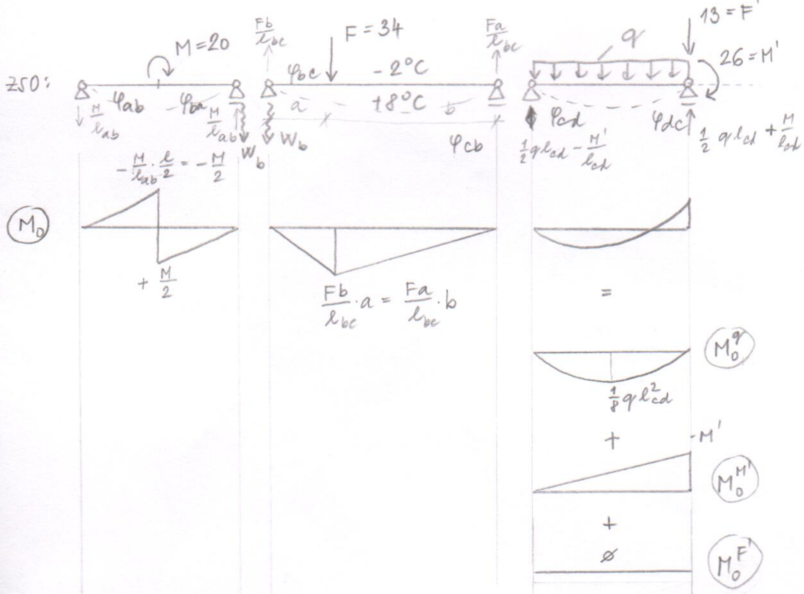
$\alpha_t = 1 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ $(°C^{-1})$



1) $n_s = a - 3 = 6 - 3 = 3 \times SN$

2) volba ZS - řada prostých nosníků + doplnění neznámých M_a, M_b, M_c

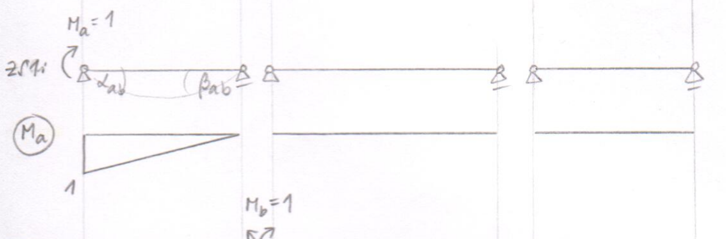
3) vykreslení průběhů ohybových momentů na ZS
- od daného zatížení M_0
- od jednotkových zatížení M_a, M_b, M_c

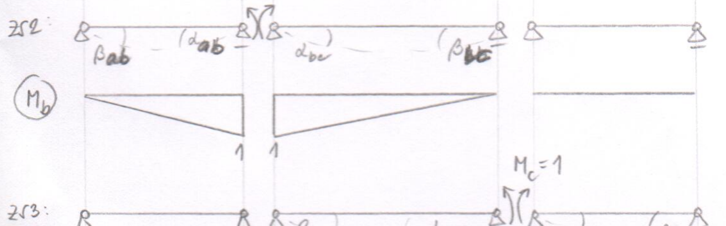


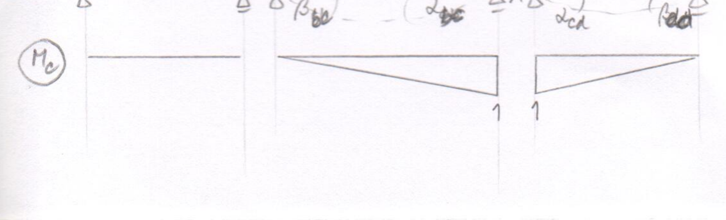
→ náhrada SU části → účinky zatížení v uzlu „d"

→ od teploty, ani od pop. podpor na SU kci reakce nevzniknou! - nic deformaci nebrání

→ vlivem def. zatížení se SU kce ZDEFORMUJE (poruchy či pootočí)







CV. 5_2:

4) Výpočet přetvoření

$$\delta_{a,a} = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot l_{ab} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right\} = \frac{l_{ab}}{3EI} = \alpha_{ab}$$

$$\delta_{b,b} = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \frac{1}{2} l_{ab} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} l_{bc} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right\} = \frac{l_{ab}}{3EI} + \frac{l_{bc}}{3EI} = (\alpha_{ab} + \alpha_{bc})$$

$$\delta_{c,c} = \frac{1}{EI} \cdot \left\{ \frac{1}{2} l_{bc} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} l_{cd} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right\} = \frac{l_{bc}}{3EI} + \frac{l_{cd}}{3EI} = (\alpha_{bc} + \alpha_{cd})$$

$$\delta_{a,b} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \cdot l_{ab} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \emptyset \right\} = \frac{l_{ab}}{6EI} = \beta_{ab}$$

$$\delta_{b,c} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2} l_{bc} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \emptyset \right\} = \frac{l_{bc}}{6EI} = \beta_{bc}$$

$$\delta_{a,c} = 0$$

→ dále stále platí $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$

$$\delta_{a,0} = \int_a^d \frac{M_a \cdot M_0}{EI} dx = \int_a^b \frac{M_a \cdot M_0}{EI} dx = \varphi_{ab}$$ ...pootočení v místě „a" na nosníku a-b od daného zatížení

$$\delta_{b,0} = \int_0^d \frac{M_b \cdot M_0}{EI} dx = \int_a^b \frac{M_b \cdot M_0}{EI} dx + \int_b^c \frac{M_b \cdot M_0}{EI} dx = \varphi_{ba} + \varphi_{bc}$$

φ_{ba} ... pootočení v místě „b" na nosníku a-b od daného zatížení

φ_{bc} ... pootočení v místě „b" na nosníku b-c od daného zatížení

$$\delta_{c,0} = \int_0^d \frac{M_c \cdot M_0}{EI} dx = \int_b^c \frac{M_c \cdot M_0}{EI} dx + \int_c^d \frac{M_c \cdot M_0}{EI} dx = \varphi_{cb} + \varphi_{cd}$$

φ_{cb} ... pootočení v místě „c" na nosníku b-c od daného zatížení

φ_{cd} ... pootočení v místě „c" na nosníku c-d od daného zatížení

5) soustava přetvárných rovnic (kanonické rovnice):

$$\delta_{a,0} + \delta_{a,a} \cdot M_a + \delta_{a,b} \cdot M_b + \underbrace{\cancel{\delta_{a,c} \cdot M_c}}_{=0} = 0$$

$$\delta_{b,0} + \delta_{b,a} \cdot M_a + \delta_{b,b} \cdot M_b + \delta_{b,c} \cdot M_c = 0$$

$$\delta_{c,0} + \underbrace{\cancel{\delta_{c,a} \cdot M_a}}_{=0} + \delta_{c,b} \cdot M_b + \delta_{c,c} \cdot M_c = 0$$

→ dosadíme vypočtení přetvoření + označíme $\frac{l_{ij}}{3EI} = \alpha_{ij}$

$\frac{l_{ij}}{6EI} = \beta_{ij}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi_{ab} + \alpha_{ab} \cdot M_a + \beta_{ab} \cdot M_b = 0 && \dots \varphi_a = 0 \\ &\varphi_{ba} + \varphi_{bc} + \beta_{ba} \cdot M_a + (\alpha_{ab} + \alpha_{bc}) \cdot M_b + \beta_{bc} \cdot M_c = 0 && \dots \varphi_b^L - \varphi_b^P = 0 \\ &\varphi_{cb} + \varphi_{cd} + \beta_{b,c} \cdot M_b + (\alpha_{bc} + \alpha_{cd}) \cdot M_c = 0 && \dots \varphi_c^L - \varphi_c^P = 0 \end{aligned}}$$

! DŮLEŽITÉ :

CV.5₃ :

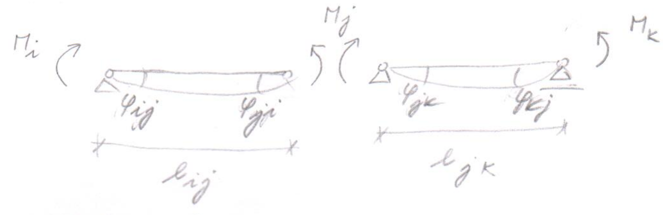
- pro řešení MTR __není__ nutný průběh vnitřních sil na ZS pro výpočet přetvoření

- přetvoření (pootočení podporových průřezů) od daného zatížení je bráno z tabulek (viz internet)

- základní def. úhly $\alpha_{ij} = \frac{l_{ij}}{3EI}$

$$\beta_{ij} = \frac{l_{ij}}{6E}$$

- kanonické rovnice dle schématu :



pro místo „j":

$$\varphi_{ji} + \varphi_{jk} + \beta_{ij} \cdot M_i + (\alpha_{ij} + \alpha_{jk}) \cdot M_j + \beta_{jk} \cdot M_k = 0$$

(30 min)

$EI = 25 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}375 \cdot 0{,}4^3$

$EI = 50000 \ kNm^2$

Přetvoření : (dle tabulek)

$$\varphi_{ab}^M = -\frac{1}{24}\frac{M}{EI} \cdot l_{ab} = -\frac{1}{24} \cdot \frac{20}{EI} \cdot 4 = -\frac{10}{3EI} = -6{,}\overline{6} \cdot 10^{-5} \ , \ \varphi_{ab}^w = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \ ; \ \underline{\underline{\varphi_{ab} = 5{,}8\overline{3} \cdot 10^{-5}}}$$

$$\alpha_{ab} = \frac{l_{ab}}{3EI} = \frac{4}{3EI} = 2{,}\overline{6} \cdot 10^{-5}$$

$$\beta_{ab} = \frac{l_{ab}}{6EI} = \frac{2}{3EI} = 1{,}\overline{3} \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{\varphi_{ba}} = \varphi_{ba}^M + \varphi_{ba}^w = \underline{\underline{-5{,}8\overline{3} \cdot 10^{-5}}}$$

$$\varphi_{ba}^M = 6{,}\overline{6} \cdot 10^{-5} \ ; \ \varphi_{ba}^w = \frac{w_a - w_b}{l_{ab}} = \frac{0 - 5 \cdot 10^{-4}}{4} = -1{,}25 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\varphi_{bc}} = \varphi_{bc}^F + \varphi_{bc}^T + \varphi_{bc}^w = \underline{\underline{2{,}1\overline{7} \cdot 10^{-3}}}$$

$$\varphi_{bc}^F = \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{EI} \cdot \frac{a \cdot b}{l_{bc}}(l_{bc} + b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{34}{EI} \cdot \frac{2 \cdot 4}{6}(6+4) = \frac{680}{9EI} = 1{,}5\overline{1} \cdot 10^{-3}$$

$$\varphi_{bc}^T = \frac{1}{2}\alpha_t \Delta T_{bc} \cdot \frac{l_{bc}}{h} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-5}(8-(-2)) \cdot \frac{6}{0{,}4} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_{bc}^w = \frac{w_c - w_b}{l_{bc}} = \frac{0 - 5 \cdot 10^{-4}}{6} = -\frac{1}{12000} = -8{,}\overline{3} \cdot 10^{-5}$$

$$\alpha_{bc} = \frac{l_{bc}}{3EI} = \frac{6}{3EI} = 4 \cdot 10^{-5}$$

$$\beta_{bc} = \frac{l_{bc}}{6EI} = \frac{6}{6EI} = 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{\varphi_{cb}} = \varphi_{cb}^F + \varphi_{cb}^T + \varphi_{cb}^w = \underline{\underline{2{,}04\overline{2} \cdot 10^{-3}}}$$

$$\varphi_{cb}^F = \frac{1}{6} \cdot \frac{F}{EI} \cdot \frac{ab}{l_{bc}}(l_{bc} + a) = \frac{1}{6} \cdot \frac{34}{EI} \cdot \frac{2 \cdot 4}{6}(6+2) = \frac{544}{9EI} = 1{,}20\overline{8} \cdot 10^{-3}$$

$$\varphi_{cb}^T = \frac{1}{2}\alpha_t \Delta T_{cb} \cdot \frac{l_{cb}}{h} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot (8-(-2)) \cdot \frac{6}{0{,}4} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_{cb}^w = \frac{w_b - w_c}{l_{bc}} = \frac{5 \cdot 10^{-4} - 0}{6} = 8{,}\overline{3} \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{\varphi_{cd}} = \varphi_{cd}^q + \varphi_{cd}^{M'} + \varphi_{cd}^{F'} = \underline{\underline{-0{,}2\overline{6} \cdot 10^{-4}}}$$

cv. 5_4 :

$$\varphi_{cd}^{q} = \frac{1}{24}\cdot\frac{q}{EI}\,l_{cd}^{3} = \frac{1}{24}\cdot\frac{6}{EI}\cdot 4^{3} = \frac{16}{EI} = 3{,}2\cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_{cd}^{M'} = -\left(\frac{1}{6}\,\frac{M'}{EI}\cdot l_{cd}\right) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{26}{EI}\cdot 4 = -\frac{52}{3EI} = -3{,}4\bar{6}\cdot 10^{-4}$$

$$\cancel{\varphi_{cd}^{F'} = \frac{1}{6}\cdot\frac{F'}{EI}\cdot\frac{ab}{l_{cd}}(l_{cd}+b)} = 0 \qquad (b=0)$$

$$\alpha_{cd} = \frac{l_{cd}}{3EI} = \frac{4}{3EI} = 2{,}\bar{6}\cdot 10^{-5}$$

(30 min)

6) Dorazení → výpočet nadpodporových momentů :

$$5{,}8\bar{3}\cdot 10^{-5} + 2{,}\bar{6}\cdot 10^{-5}\cdot M_a + 1{,}\bar{3}\cdot 10^{-5}\cdot M_b = 0$$

$$-5{,}8\bar{3}\cdot 10^{-5} + 2{,}1\bar{7}\cdot 10^{-3} + 1{,}\bar{3}\cdot 10^{-5} M_a + (2{,}\bar{6}\cdot 10^{-5} + 4\cdot 10^{-5})\cdot M_b + 2\cdot 10^{-5}\cdot M_c = 0$$

$$2{,}04\bar{2}\cdot 10^{-3} - 0{,}2\bar{6}\cdot 10^{-4} + 2\cdot 10^{-5}\cdot M_b + (4\cdot 10^{-5} + 2{,}\bar{6}\cdot 10^{-5})\cdot M_c = 0$$

$$\begin{aligned}
5{,}8\bar{3}\cdot 10^{-5} &+ 2{,}\bar{6}\cdot 10^{-5}\cdot M_a + 1{,}\bar{3}\cdot 10^{-5} M_b &&= 0\\
+2{,}119\bar{4}\cdot 10^{-3} &+ 1{,}\bar{3}\cdot 10^{-5} M_a + 6{,}\bar{6}\cdot 10^{-5} M_b + 2\cdot 10^{-5} M_c &&= 0\\
2{,}01\bar{5}\cdot 10^{-3} &+ 2\cdot 10^{-5} M_b + 6{,}\bar{6}\cdot 10^{-5} M_c &&= 0
\end{aligned}$$

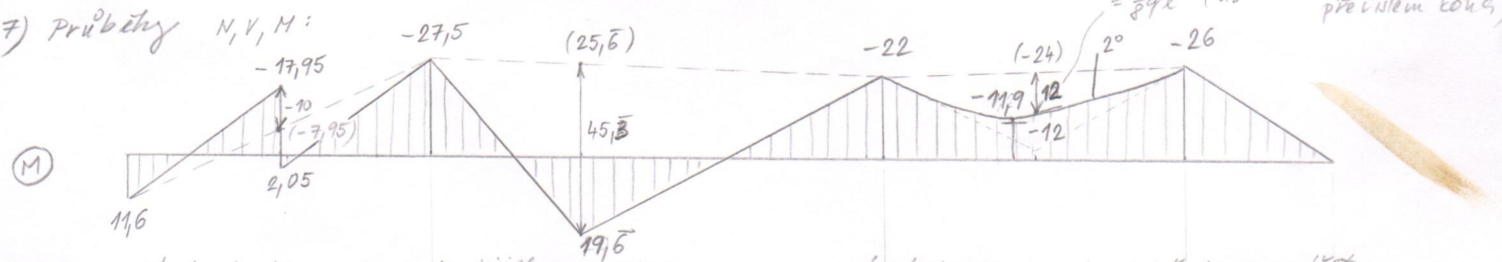
$$\begin{bmatrix} 2{,}\bar{6}\cdot 10^{-5} & 1{,}\bar{3}\cdot 10^{-5} & 0 \\ 1{,}\bar{3}\cdot 10^{-5} & 6{,}\bar{6}\cdot 10^{-5} & 2\cdot 10^{-5} \\ 0 & 2\cdot 10^{-5} & 6{,}\bar{6}\cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \\ M_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5{,}8\bar{3}\cdot 10^{-5} \\ -2{,}119\bar{4}\cdot 10^{-3} \\ -2{,}01\bar{5}\cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_a = 11{,}6\ \text{kNm}$$
$$M_b = -27{,}5\ \text{kNm}$$
$$M_c = -22{,}0\ \text{kNm}$$

(10 min)

(30 min)

7) Průběhy N, V, M :

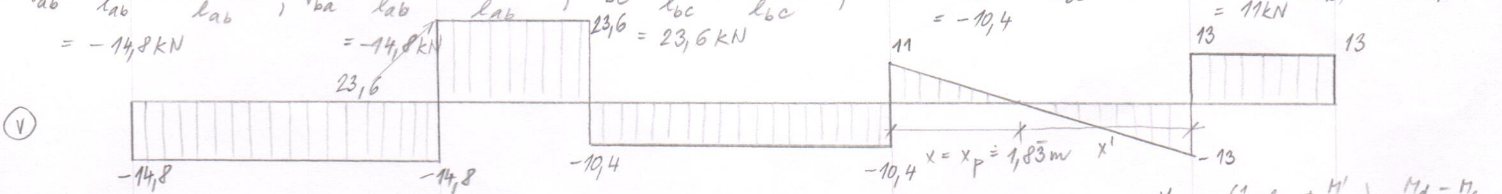


- vyneseme hodnoty M_a, M_b, M_c → jejich spojnice tvoří posunuté zákl. čáry, od nichž lze vynášet (M) odpovídající prostému nosníku

Koncové posouvající síly : $\boxed{V_x = V_{x,0} + \frac{M_b - M_a}{l}}$ $\quad V_{x,0}$ ... v řezu x od zatížení

$V_{ab} = -\frac{M}{l_{ab}} + \frac{M_b - M_a}{l_{ab}}$; $V_{ba} = -\frac{M}{l_{ab}} + \frac{M_b - M_a}{l_{ab}}$; $V_{bc} = \frac{Fb}{l_{bc}} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}}$; $V_{cb} = -\frac{Fa}{l_{bc}} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}}$; $V_{cd} = \left(\frac{1}{2}ql_{cd} - \frac{M'}{l_{cd}}\right) + \frac{\overset{0}{M_d} - M_c}{l_{cd}}$

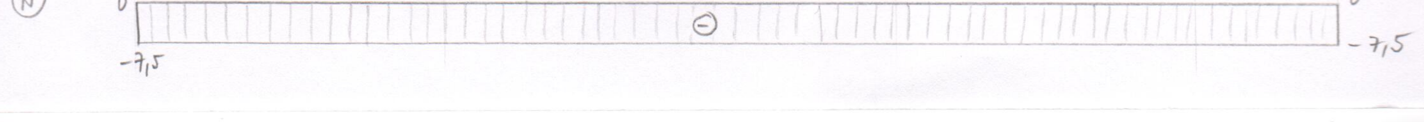
$= -14{,}8\,kN$ $\quad = -14{,}8\,kN$ $\quad = 23{,}6\,kN$ $\quad = -10{,}4$ $\quad = 11\,kN$



$V_{dc} = -\left(\frac{1}{2}ql_{cd} + \frac{M'}{l_{cd}}\right) + \frac{M_d - M_c}{l_{cd}}$
$= -13\ kN$

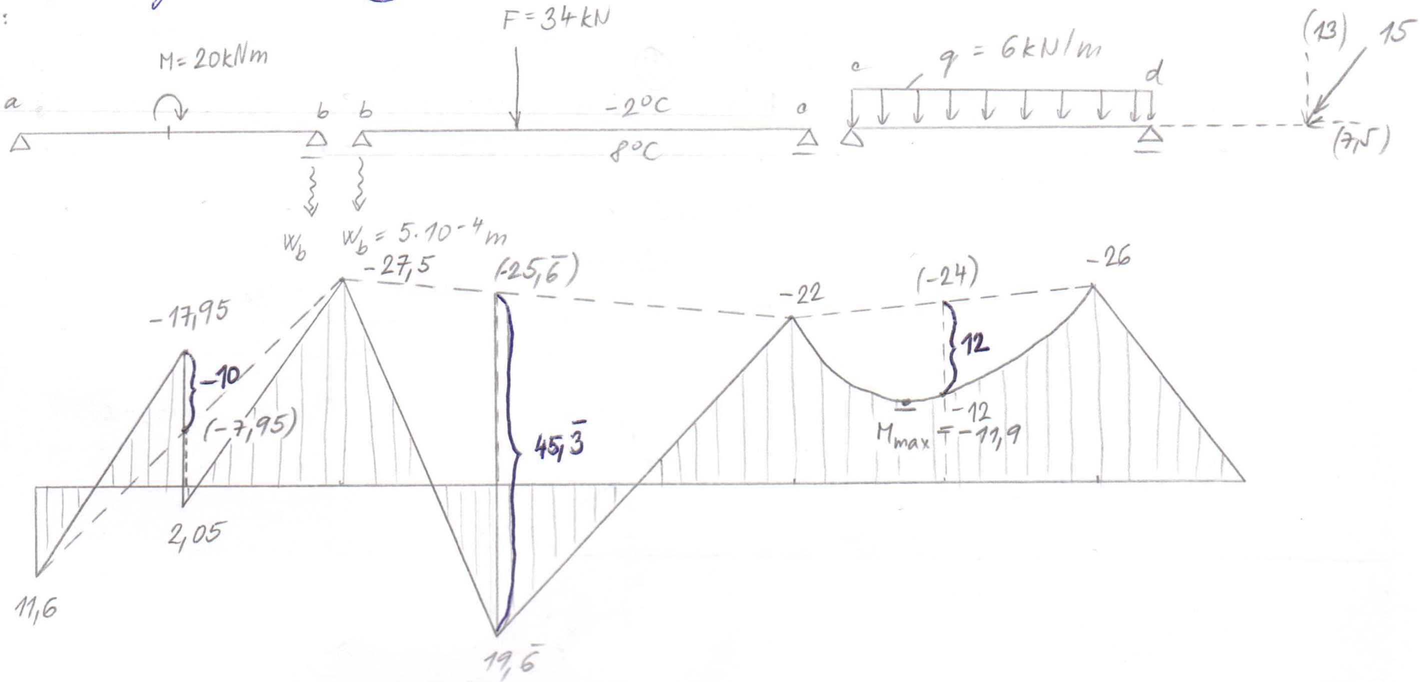
$R_a = V_{ab}$; $R_b = V_{ba} + V_{bc}$; $R_c = V_{cb} + V_{cd}$

$M_{max} \Rightarrow \boxed{M_x = M_{x,0} + \frac{M_a x' + M_b x}{l_{ab}}} = \approx 0 + \frac{-22\cdot(4-1{,}8\bar{3}) + 0}{4} = -11{,}9$ (nebo $M_b = M_a + \int V dx$) nebo zprava



CV. 5_5: Vykreslení (M)

ZSO:

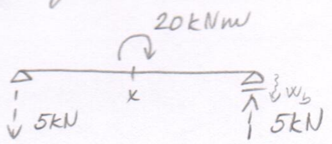


K PRŮBĚHU (M): 1) Vynesu známé hodnoty nadpodporových momentů M_a, M_b, M_c + průběh (M) na převislém konci

2) jejich spojnice tvoří posunuté základní čáry, od nichž lze vynášet (M) odpovídající jednotlivým prostým nosníkům (vykresleno - - -) od daného zatížení

3) Postupně dopočítávám M_x od zatížení:

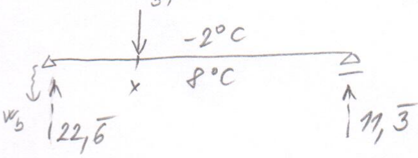
a) M pod osamělým momentem v poli a-b



$M_x = -5\cdot 2 = -10$ kNm

celkově: $-7,95 - 10 = -17,95$ kNm

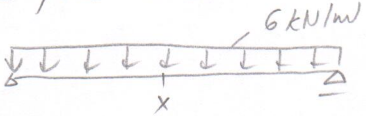
b) M pod osamělou silou v poli b-c



$M_x = 22,\bar{6} \cdot 2 = 45,\bar{3}$ kNm

celkově: $-25,\bar{6} + 45,\bar{3} = 19,\bar{6}$ kNm

c) M v polovině pole c-d



$M_x = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 4^2 = 12$ kNm

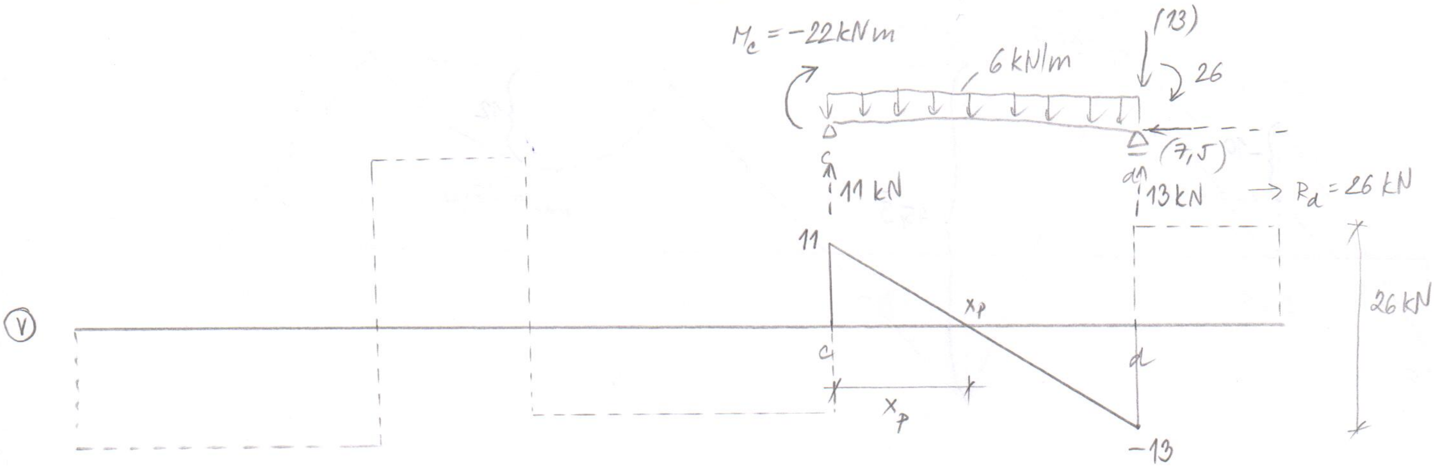
celkově: $-24 + 12 = -12$ kNm

! zatížení silami (13 kN) a (7,5 kN) a momentem -26 kNm již neuvažujeme → vykresleno již na převislém konci nosníku, kde toto zatížení skutečně působí

d) $M_{max} = ?$

– pro výpočet M_{max} budeme potřebovat průběh V v poli c–d
→ $\underline{\text{nosník c–d musíme zatížit daným zatížením i momentem } M_c \text{ !}}$

ZS0 + ZS3 :



x_p : $11 - 6 \cdot x_p = 0$

$$\underline{\underline{x_p = \frac{11}{6} \doteq 1{,}83 \text{ m}}}$$

$$M_{x_p} = M_c + \int_c^{x_p} V\,dx$$

$$= -22 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 1{,}83 \doteq \underline{\underline{-11{,}9 \text{ kNm}}}$$

→ pro vykreslení M nic jiného nepotřebujeme, tedy ani celý průběh V (vykresleno - - -)