

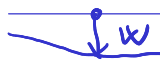
Výpočet průhybu a pootočení při ohybu

Integrace diferenciálních rovnice ohybové čáry

- diferenciální rovnice

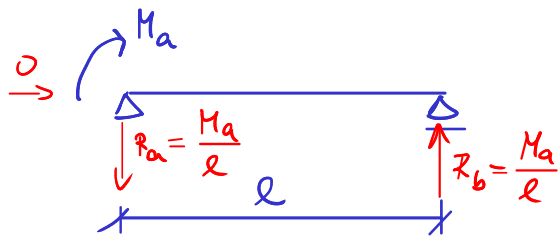
2. derivace průhybu je úměrná ohyb. momentu

$$w'' = - \frac{M_y}{EI_y} + \left(- \frac{\alpha_T \Delta T}{h} \right) \quad \Delta T = T_d - T_h$$

označení a kladný smysl	veličina	diferenciální závislost
	průhyb	w
	pootočení	$\varphi = w'$
	ohybový moment	$M = -EI w''$
	posouvající síly	$V = -EI w'''$
	příčné zátížení	$q = EI w^{IV}$

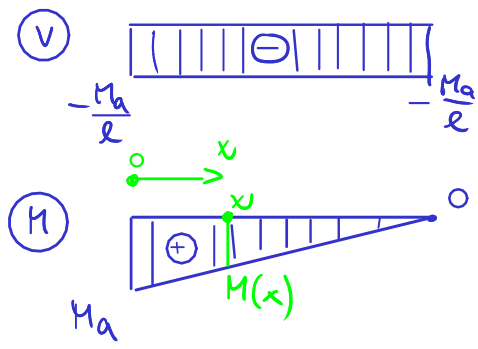
Obvykle řešíme z průběhu ohyb. momentů $M(x)$
nebo zátížení $q(x)$.

Integrací odvozuje rovnici ohybová čára $w(x)$



M
↑

$$M(x) = M_a - R_a x = M_a - \frac{M_a}{l} x = M_a \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$



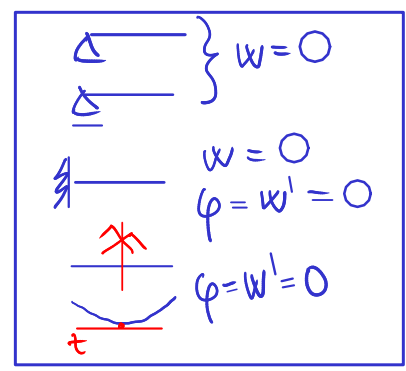
$$EI w'' = -M(x)$$

$$EI w'' = M_a \left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

$$EI w' = M_a \left(\frac{x^2}{2l} - x\right) + C_1$$

$$EI w = M_a \left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2}\right) + C_1 x + C_2$$

konstanty C_1 a C_2 z okrajových podmínek nebo z podmínek spojitosti



$$w(x=0) = 0$$

$$0 = M_a (0 - 0) + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

$$w(x=l) = 0$$

$$0 = M_a \left(\frac{l^3}{6l} - \frac{l^2}{2}\right) + C_1 l + 0$$

$$C_1 l = M_a \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{6}\right)$$

$$\underline{C_1 = \frac{1}{3} M_a l}$$

rovnice ohyb. čáry:

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_a}{l} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} l\right) + \frac{1}{3} M_a l x + 0 \right]$$

$$\textcircled{1} w(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_a}{6l} (x^3 - 3lx^2 + 2l^2 x) \right]$$

rovnice pootočení:

$$\textcircled{2} \varphi(x) = w'(x) = \frac{1}{EI} \left[M_a \left(\frac{x^2}{2l} - x\right) + \frac{1}{3} M_a l \right]$$

$$w(x=\frac{l}{2}) = \textcircled{1} \frac{1}{EI} \left[\frac{M_a}{6l} \left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - 3l\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2l^2\left(\frac{l}{2}\right)\right) \right] = \underline{\underline{\frac{M_a l^2}{16EI}}}$$

$$W_{max} \rightarrow W' = \varphi = 0$$

$$\text{dla } ① = 0$$

$$② = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{Ma}{6l} (3x^2 - 6lx + 2l^2) \right] = 0$$

$$(3x^2 - 6lx + 2l^2) = 0$$

$$x_{1,2} = l \pm \frac{\sqrt{3}}{3} l$$

→ mimo nosuik

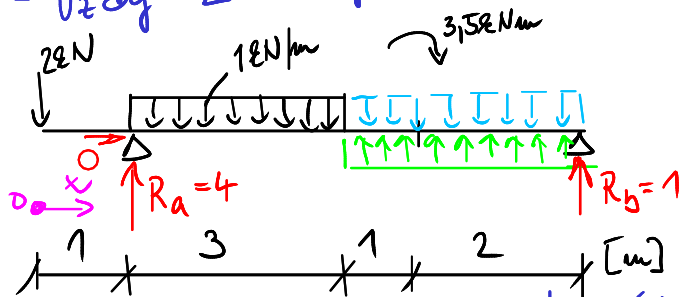
$$W_{max} = W(x = l - \frac{\sqrt{3}}{3} l)$$

$$W_{max} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Ma}{6l} \left((l - \frac{\sqrt{3}}{3} l)^3 - 3l(l - \frac{\sqrt{3}}{3} l)^2 + 2l^2(l - \frac{\sqrt{3}}{3} l) \right) \right] = \dots$$

$$W_{max} = \frac{\sqrt{3} M_a l^2}{27 EI}$$

Clebschova metoda

- nespojitě zatížen, podepřen mimo konce, ...
- $EI = \text{konst.}$
- vždy 2 integrační konstanty



$$\sum M_{ai} = 0 \Rightarrow R_b = 1 \text{ kN}$$

$$\sum M_{bi} = 0 \Rightarrow R_a = 4 \text{ kN}$$

- průběh ohybových momentů $M(x)$ nelze vyjádřit jedním výrazem $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ obor rozdělíme na jednotlivé intervaly
- při sestavování rovnice $M(x)$ v určitém intervalu převezneme beze změny výraz z předchozích intervalů a doplníme o nové zatížení

$$M(x) = -2x \Big|_{x>1} + 4 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x-1) \cdot \frac{(x-1)}{2} \Big|_{x>4} + \frac{1}{2} (x-4)^2 \Big|_{x>5} + 3.5$$

$$EI w'' = -M(x) \quad \text{neroznásovejeme } (x-a)$$

$$EI w'' = 2x \Big|_{x>1} - 4(x-1) + \frac{1}{2} (x-1)^2 \Big|_{x>4} - \frac{1}{2} (x-4)^2 \Big|_{x>5} - 3.5$$

- při integraci neodstraňujeme členy $(x-a)$ a ukládáme s nimi jako s proměnnou "x"

$$\textcircled{1} EI w' = C_1 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_{x>1} - 4 \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_{x>4} - \frac{1}{2} \frac{(x-4)^3}{3} \Big|_{x>5} - 3.5 \underbrace{(x-5)}_{!!}$$

$$\textcircled{2} EI w = C_2 + C_1 x + \frac{x^3}{3} \Big|_{x>1} - 2 \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{1}{6} \frac{(x-1)^4}{4} \Big|_{x>4} - \frac{1}{6} \frac{(x-4)^4}{4} \Big|_{x>5} - 3.5 \frac{(x-5)^2}{2}$$

$$w(x=1) = 0$$

$$0 = C_2 + C_1 \cdot 1 + \frac{1^3}{3}$$

$$w(x=4) = 0$$

$$0 = C_2 + C_1 \cdot 4 + \frac{4^3}{3} - \frac{2}{3} 6^3 + \frac{1}{24} 6^4 - \frac{1}{24} 3^4 - \frac{3.5}{2} \cdot 2^2$$

$$C_1 = -\frac{109}{48}$$

$$C_2 = \frac{31}{16}$$

rovnice ohybové čáry:

$$(2) \quad w(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{31}{16} - \frac{109}{48}x + \frac{x^3}{3} \right]_{x>1} - \frac{2}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 \Big|_{x>4} - \frac{1}{24}(x-4)^4 \Big|_{x>5} - \frac{1,45}{2}(x-5)^2 \Big]$$

$$(1) \Rightarrow \varphi = w'(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{109}{48} + x^2 \right]_{x>1} - 2(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 \Big|_{x>4} - \frac{1}{6}(x-4)^3 \Big|_{x>5} - 3,5(x-5) \Big]$$

$$w(x=0) = \frac{1}{EI} \left[\frac{31}{16} - 0 + 0 \right] = \frac{31}{16EI}$$

$$w(x=1) = \frac{1}{EI} \left[\frac{31}{16} - \frac{109}{48} \cdot 1 + \frac{1}{3} \right] = 0$$

$$w(x=2) = \frac{1}{EI} \left[\frac{31}{16} - \frac{109}{48} \cdot 2 + \frac{2^3}{3} - \frac{2}{3}1^3 + \frac{1^4}{24} \right] = -\frac{27}{48EI}$$

$$w(x=3) = -\frac{26}{48EI}$$

$$w(x=4) = -\frac{21}{48EI}$$

$$w(x=5) = \frac{10}{48EI}$$

$$w(x=6) = \frac{29}{48EI}$$

$$w(x=7) = 0$$

$$\varphi(x=0) = -\frac{109}{48EI}$$

$$\varphi(x=1) =$$

$$\varphi(x=7) =$$

Spočítat zprava /
překlopit zadání podle svisle osy
($w_1 = w_2$)
($\varphi_1 = -\varphi_2$)

$$w_0 = \frac{31}{16EI}$$

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = -\frac{9}{16EI}$$

$$w_3 = -\frac{13}{24EI}$$

$$w_4 = -\frac{7}{16EI} \quad \phi_0 = -\frac{109}{48EI}$$

$$w_5 = \frac{5}{24EI} \quad \phi_1 = -\frac{61}{48EI}$$

$$w_6 = \frac{29}{48EI} \quad \phi_2 = -\frac{5}{48EI}$$

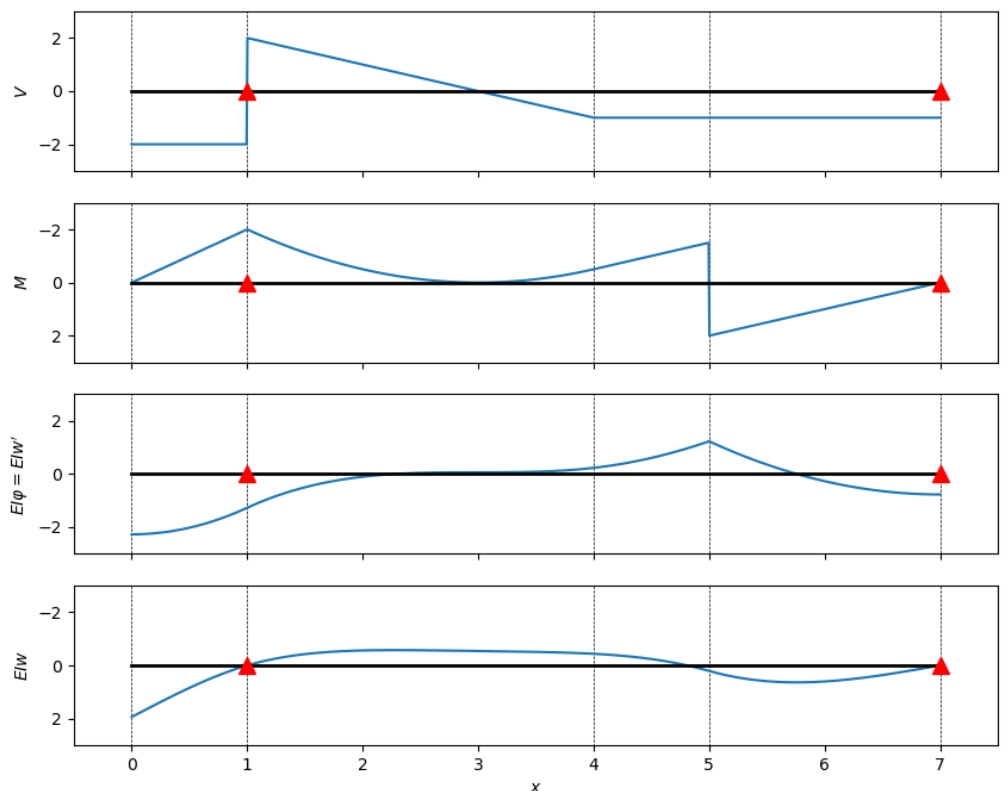
$$w_7 = 0 \quad \phi_3 = \frac{1}{16EI}$$

$$\phi_4 = \frac{11}{48EI}$$

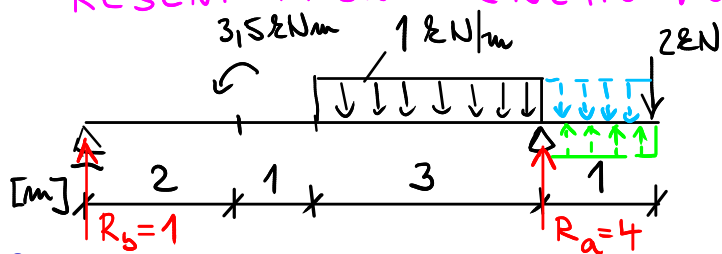
$$\phi_5 = \frac{59}{48EI}$$

$$\phi_6 = -\frac{13}{48EI}$$

$$\phi_7 = -\frac{37}{48EI}$$



ŘEŠENÍ PŘEKLOPENÉHO NOSNÍKU



$$M(x) = R_b \cdot x \Big|_{x>2}^{-3.5} \Big|_{x>3} - 1 \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_{x>6} + 1 \frac{(x-6)^2}{2} + R_a \cdot (x-6)$$

$$EI w'' = -M(x)$$

$$EI w'' = -x \Big|_{x>2} + 3.5 \Big|_{x>3} + \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_{x>6} - \frac{(x-6)^2}{2} - 4(x-6)$$

$$EI w' = C_1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{x>2} + 3.5(x-2) \Big|_{x>3} + \frac{(x-3)^3}{6} \Big|_{x>6} - \frac{(x-6)^3}{6} - 4 \frac{(x-6)^2}{2}$$

$$EI w = C_2 + C_1 x - \frac{x^3}{6} \Big|_{x>2} + 3.5 \frac{(x-2)^2}{2} \Big|_{x>3} + \frac{(x-3)^4}{24} \Big|_{x>6} - \frac{(x-6)^4}{24} - 2 \frac{(x-6)^3}{3}$$

$$w(x=0) = 0 : 0 = C_2 + C_1 \cdot 0 - 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$w(x=6) = 0 : 0 = 0 + 6C_1 - \frac{6^3}{6} + 3.5 \cdot \frac{4^2}{2} + \frac{3^4}{24}$$

$$C_1 = \frac{37}{48}$$

$$w(x) = \frac{37}{48} x - \frac{x^3}{6} \Big|_{x>2} + \frac{7}{4} \frac{(x-2)^2}{2} \Big|_{x>3} + \frac{(x-3)^4}{24} \Big|_{x>6} - \frac{(x-6)^4}{24} - 2 \frac{(x-6)^3}{3}$$

$$\varphi(x) = w'(x) = \frac{37}{48} - \frac{x^2}{2} \Big|_{x>2} + \frac{7}{2} \frac{(x-2)}{2} \Big|_{x>3} + \frac{(x-3)^3}{6} \Big|_{x>6} - \frac{(x-6)^3}{6} - 2(x-6)^2$$

$$\varphi(x=3) = \left[\frac{37}{48} - \frac{3^2}{2} + \frac{7}{2} \cdot 1 \right] \frac{1}{EI} = \frac{-11}{48EI}$$

$$w(x=4) = \frac{1}{EI} \left[\frac{37}{48} \cdot 4 - \frac{4^3}{6} + \frac{7}{4} \cdot 2^2 + \frac{1^4}{24} \right] = -\frac{13}{24EI}$$

předchozí řešení

$$\varphi(x=4) = \frac{11}{48EI} \checkmark$$

$$w(x=3) = -\frac{13}{24EI} \checkmark$$