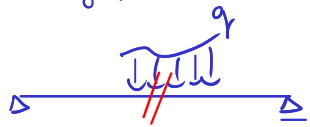


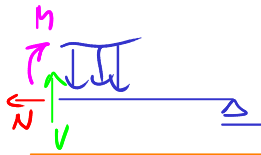
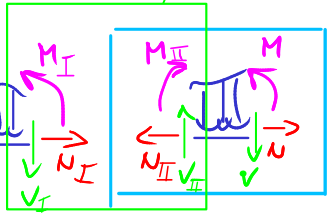
Vnitřní síly

- síly jimiž na sebe vzájemně působí dvě části prutu v místě myšleného řezu

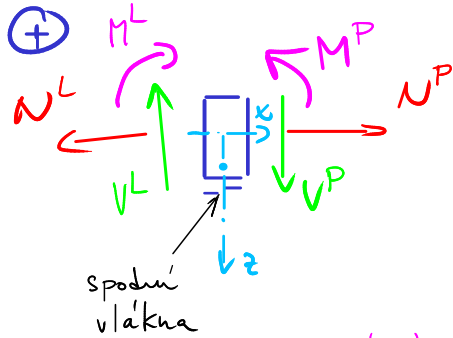


interakce vnitřní vazby
(akce a reakce)
 $N_I = -N_{II}$, $V_I = -V_{II}$, $M_I = -M_{II}$

derivace-integrační schéma



vnitřní síly N, V, M spolu se zatížením na oddělené části tvoří rovnovážnou soustavu sil

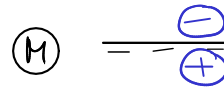
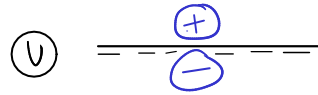
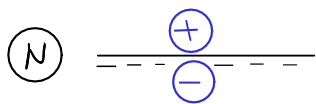


N ... normálová síla (kladná vyvoluje tah)

V ... posouvající síla (kladná se snaží element nosníku otáčet ve směru chodu hodinových ručiček)

M ... ohybový moment (kladný natahuje spodní vlákna)

- konvence pro vykreslování

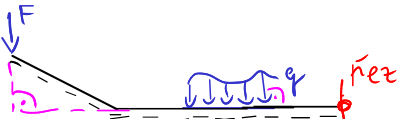


střednice
moment vykresluje
na stranu tažených vláken

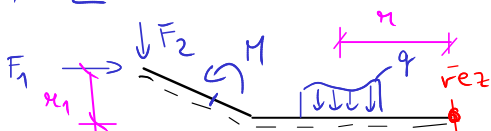
$N^L(x) = \sum$ zatížení $\parallel$ se střednicí řezaného prutu působící na celé levé odříznuté části



$V^L(x) = \sum$ zatížení $\perp$ na střednici řezaného prutu působící na celé levé odříznuté části

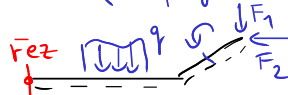


$M^L(x) = \sum$ zatížení způsobujícího ohybový moment působící na celé levé odříznuté části



(osamělá síla na rameni, osamělý moment, spojitá zat.)

- stejné pro $N^P(x)$, $V^P(x)$, $M^P(x)$



pouze se zamění levý $\rightarrow$ pravý

- hodnoty vnitřních sil můžeme vyčíst v libovolném řezu pro efektivní/rychlé vykreslování volíme pouze významné řezy, ve kterých dochází ke změně NVM

- pro N $\left\{ \begin{array}{l} \text{těsně před a těsně za osamělou silou} \\ \text{v místě začátku a konce spojitěho zat.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{rovnoběžné s osou} \\ \text{prutu v místě řezu} \end{array} \right.$
- pro V $\left\{ \begin{array}{l} \text{těsně před a těsně za osamělou silou} \\ \text{v místě začátku a konce spojitěho zat.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{kolmé na osu} \\ \text{prutu v místě řezu} \end{array} \right.$
- pro M $\left\{ \begin{array}{l} \text{těsně před a těsně za osamělým momentem} \\ \text{v místě osamělých sil} \\ \text{v místě začátku a konce spojitěho zat. (silové, momentové)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{v tomto místě není } N(V, M) \text{ definována} \end{array} \right.$

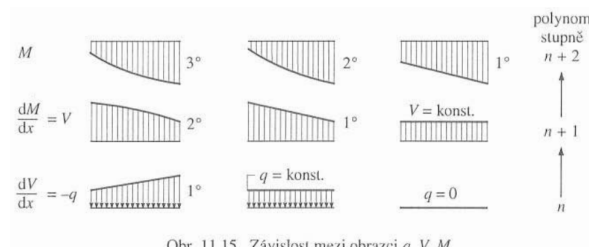
- mezilehlé úseky vyřešíme na základě dalších znalostí

→ nezatížený úsek mezi dvěma body - lineárně spojíme hodnoty v krajních bodech úseku

→ úsek zatížený spojitým zatížením

→ tvar odvodíme na základě znalosti např. derivačně-integračního schématu

→ doplníme pomocné konstrukční body, tečky



Obr. 11.15 Závislost mezi obrázky q, V, M

POZOR! pokud je úsek spojitěho zatížení přerušen osamělým břemenem, které má vliv na příslušnou NVM, je v tomto místě nutné úsek rozdělit na dva!!!

- hodnotu v každém řezu, kde je NVM definována můžeme tedy vypočítat zleva či zprava podle kladné konvence

$$\begin{array}{c} \text{N}^L \leftarrow \text{M}^L \uparrow \\ \text{V}^L \uparrow \end{array} \oplus \sum \text{zat.}^L \left\{ \begin{array}{l} \text{N}^L = \text{N}^P \\ \text{V}^L = \text{V}^P \\ \text{M}^L = \text{M}^P \end{array} \right\} \sum \text{zat.}^P \begin{array}{c} \text{M}^P \uparrow \\ \text{V}^P \downarrow \text{N}^P \rightarrow \end{array} \oplus$$

(v ideálním případě a dostatku času výpočet + kontrola)

Prostý nosník s převýstými konci

REAKCE

$$\sum F_{xi} = 0 \quad \oplus \rightarrow$$

$$R_{bx} - F_{3x} = 0 \Rightarrow R_{bx} = 8,66 \text{ kN}$$

$$\sum M_{bi} = 0 \quad \oplus \uparrow$$

$$F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 + R_{dx} \cdot 4 + F_{3z} \cdot 6 = 0$$

$$R_{dx} = -4 \text{ kN}$$

$$\sum M_{di} = 0 \quad \oplus \uparrow$$

$$F_1 \cdot 6 - R_{bz} \cdot 4 + F_2 \cdot 2 + F_{3z} \cdot 2 = 0$$

$$R_{bz} = 14 \text{ kN}$$

kontrola:

$$\sum F_{zi} = 0 \quad \oplus \uparrow$$

$$-F_1 + R_{bz} - F_2 + R_{dx} + F_{3z} = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

NORMÁLOVÉ SÍLY

N_b není definována

$$N_{ab}^L = 0 = N_{ba}^L$$

$$N_{bc}^L = -R_{bx} = -8,66 \text{ kN}$$

$$N_{cd}^L = -R_{bx} = -8,66 \text{ kN}$$

$$\text{kontrola: } N_{ed}^P = -F_{3x} = -8,66 \text{ kN}$$

POSOUVACÍ SÍLY

$$V_{ab}^L = -F_1 = -4 \text{ kN} = V_x^L = V_{ba}^L$$

$$V_{bc}^L = -F_1 + R_{bz} = V_{ab}^L + R_{bz} = 10 \text{ kN} = V_{cb}^L$$

$$V_{cd}^L = -F_1 + R_{bz} - F_2 = V_{bc}^L - F_2 = -1 \text{ kN}$$

$$V_{ed}^P = -F_{3z} = -5 \text{ kN} = V_{de}^P$$

$$V_{dc}^P = -F_{3z} - R_{dx} = (V_{de}^P - R_{dx}) = -1 \text{ kN}$$

$$\text{kontrola: } V_{cd}^P = -F_{3z} - R_{dx} = -1 \text{ kN}$$

OHYBOVÉ MOMENTY

$$M_a^L = (F_1 \cdot 0) = 0$$

$$M_a^L = M_{a-b}^L(x=0) = -F_1 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$M_{a-b}^L(x) = -F_1 \cdot x \Rightarrow \text{lineární průběh}$$

$$M_b^L = M_{a-b}^L(x=2) = -F_1 \cdot 2 = -8 \quad \checkmark$$

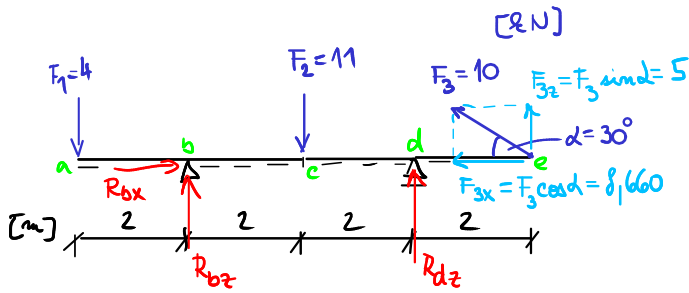
$$M_b^L = -F_1 \cdot 2 = -8 \text{ kNm}$$

$$M_c^L = -F_1 \cdot 4 + R_{bz} \cdot 2 = 12 \text{ kNm}$$

$$M_e^P = 0$$

$$M_d^P = F_{3z} \cdot 2 = 10 \text{ kNm}$$

$$\text{kontrola: } M_c^P = F_{3z} \cdot 4 + R_{dx} \cdot 2 = 12 \text{ kNm}$$

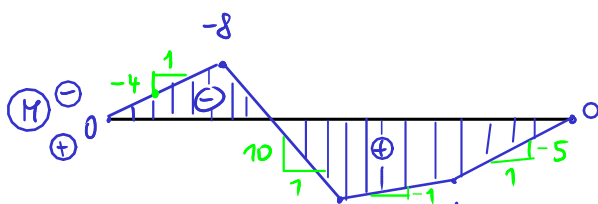
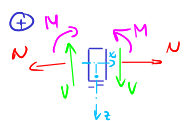
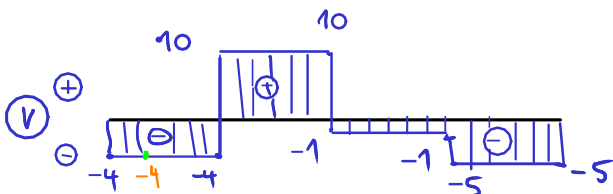
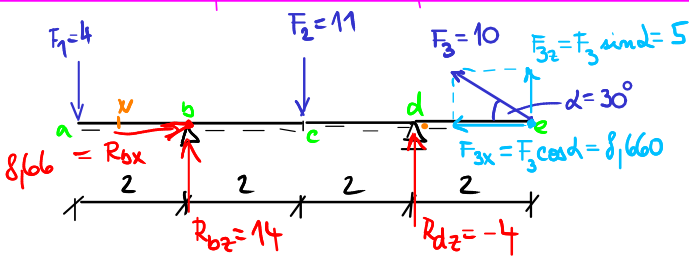


Pozn. Značení: L., zleva P., zprava

N_{bc}^L ... normálová síla v bodě b směrem k bodu c (těsně za bodem b) řešená zleva

M_b^L ... moment v bodě b

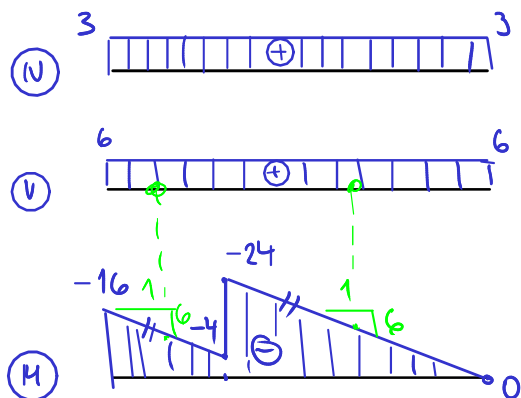
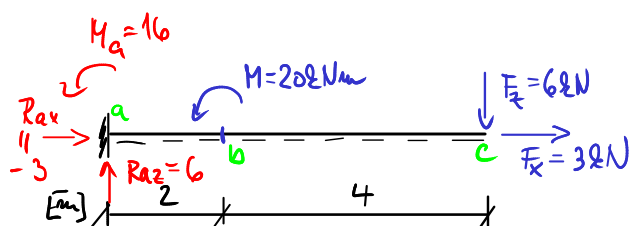
$M(x)$... obecná funkce pro moment mezi body a-b pro obecnou polohu x



$$M_c^L = M_b^L + \int_b^c V dx = -8 + 10 \cdot 2 = 12 \text{ kNm}$$

$$M_c^P = M_d^P - \int_c^d V dx = 10 - (-2 \cdot 1) = 12 \text{ kNm}$$

zprava



ideálně vykreslujeme
z volného konce
a reakce použijeme
ke kontrole

$$\text{REAKCE: } \sum F_{xi} = 0 \Rightarrow R_{ax} + F_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = -3 \text{ N}$$

$$\sum F_{zi} = 0 \Rightarrow R_{az} - F_z = 0 \Rightarrow R_{az} = 6 \text{ N}$$

$$\sum M_{ai} = 0 \Rightarrow M_a + M - F_z \cdot 6 = 0 \Rightarrow M_a = 16 \text{ Nm}$$

$\oplus \rightarrow N$

$$N_c^P = F_x = 3 \text{ N} = N_{ab}^P \quad \checkmark$$

kontrola:

$$\sum M_{bi} = 0 \quad 0 = 0 \text{ N}$$

$$\leftarrow \text{kontrola: } N_{ab}^L = -R_{ax} = 3 \text{ N}$$

$\oplus \downarrow V$

$$V_{cb}^P = +F_z = 6 \text{ N} = V_{ab}^P \quad \checkmark$$

$$\uparrow \text{kontrola: } V_{ab}^L = R_{az} = 6 \text{ N}$$

$\oplus \uparrow M$

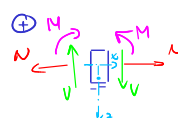
$$M_c^P = 0 \text{ Nm}$$

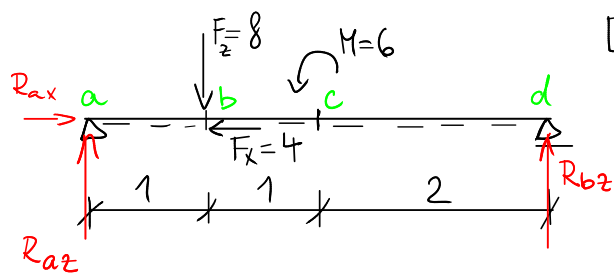
$$M_{bc}^P = -F_z \cdot 4 = -24 \text{ Nm}$$

$$M_{ba}^P = M_{bc}^P + M = -4 \text{ Nm}$$

$$M_a^P = -F_z \cdot 6 + M = -6 \cdot 6 + 20 = -16 \text{ Nm} \quad \checkmark$$

$$\text{kontrola: } M_a^L = -M_a = -16 \text{ Nm}$$





[m, kN, kNm]

Reakce:

$$\sum F_{xi} = 0 \oplus \rightarrow : R_{ax} - F_x = 0$$

$$R_{ax} = F_x = 4 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$\sum M_{ai} = 0 \oplus \curvearrowright : -F_z \cdot 1 + M + R_{bz} \cdot 4 = 0$$

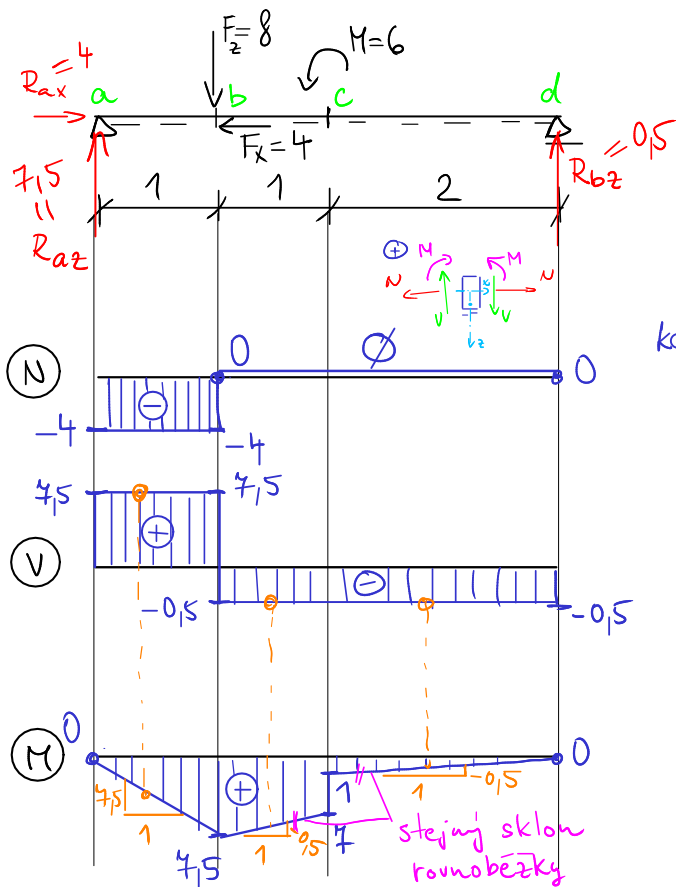
$$R_{bz} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_{bi} = 0 \oplus \curvearrowright : R_{az} \cdot 4 - F_z \cdot 3 - M = 0$$

$$R_{az} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

kontrola: $\sum F_{zi} = 0 \oplus \uparrow$

$$R_{az} - F_z + R_{bz} = 0 \checkmark$$



Normálové síly

$$N_{ab}^L = -R_{ax} = -4 \text{ kN}$$

$$N_{dc}^P = 0 \text{ kN}$$

$$N_{ba}^L = -R_{ax} = -4 \text{ kN}$$

$$N_{bc}^P = 0 \text{ kN}$$

kontrola: $N_{ba}^P = -F_x = -4 \text{ kN} \checkmark$

Posouvající síly

$$V_{ab}^L = R_{az} = 7,5 \text{ kN}$$

$$V_{dc}^P = -R_{bz} = -0,5 \text{ kN}$$

$$V_{ba}^L = R_{az} = 7,5 \text{ kN}$$

kontrola:

$$V_{bc}^L = R_{az} - F_z = -0,5 \text{ kN}$$

$$V_{bc}^P = -R_{bz} = -0,5 \text{ kN} \checkmark$$

Ohybové momenty

$$M_a^L = 0 \text{ kNm}$$

$$M_b^L = R_{az} \cdot 1 = 7,5 \text{ kNm}$$

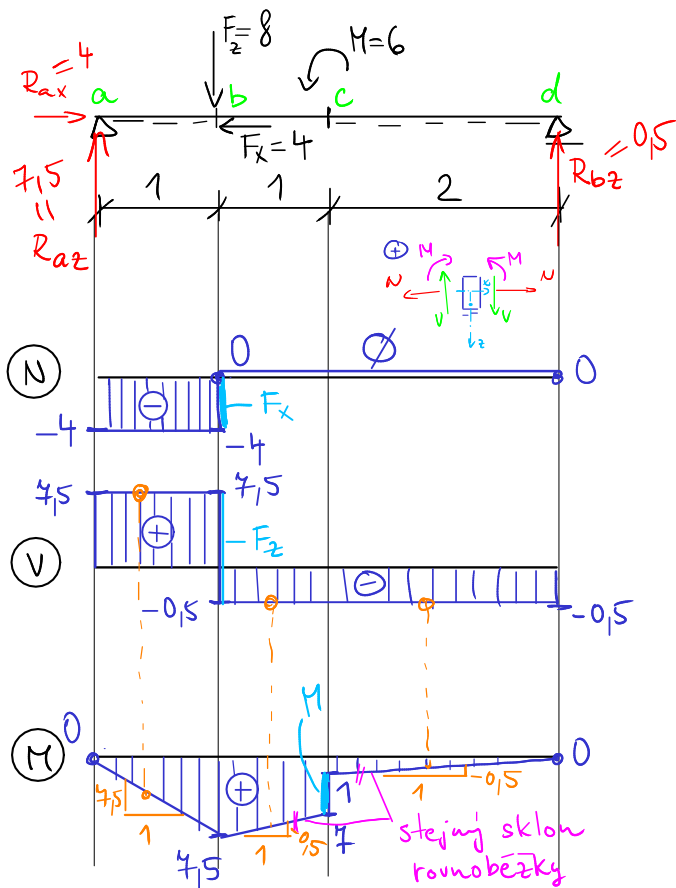
$$M_{cb}^L = R_{az} \cdot 2 - 8 \cdot 1 = 7 \text{ kNm}$$

$$M_e^P = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{ce}^P = R_{bz} \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ kNm}$$

kontrola: $M_{cb}^P = R_{bz} \cdot 2 + M = 7 \text{ kNm}$

Užitečné souvislosti a vlastnosti použitého při vykreslování a pro kontrolu



- v místě osamělých břemen, příslušejících dané vnitřní síle, není vnitřní síla definována
 - (N) v místě osové síly →
 - (V) v místě příčné/kolmé síly ↓
 - (M) v místě ↻
 je tam skok o velikosti daného zatížení
 určujeme hodnoty těsně zleva a zprava

- v místě příčných osamělých břemen ↓ mají (M) zlomy (změna sklonu ↘ ↗)

- sklon tečen u momentů

$$\frac{dM}{dx} = V = \tan \varphi_M$$

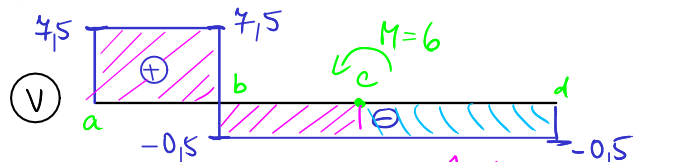
- sklon tečny v hledaném řezu můžeme naznačit jako rychlost změny na 1 metr



- využití integrace pro výpočet/kontrolu

$$M^L(x) = \int_0^x V^L(x) dx + \sum M^L$$

$$M^P(x) = -\int_0^x V^P(x) dx + \sum M^P$$



$$M_{ca}^L = \int_a^c V^L(x) dx + \sum M^L = 7.5 \cdot 1 + 1 \cdot (-0.5) + 0 = 7 \text{ Nm}$$

$$M_{cd}^P = -\int_c^d V^P(x) dx + \sum M^L = -2 \cdot (-0.5) + 6 = 7 \text{ Nm}$$

$$M_{ca}^L = \int_a^c V^L(x) dx + \sum M^L = 7.5 \cdot 1 + 1 \cdot (-0.5) - 6 = 1 \text{ Nm}$$

$$M_{cd}^P = -\int_c^d V^P(x) dx + \sum M^P = -2 \cdot (-0.5) + 0 = 1 \text{ Nm}$$

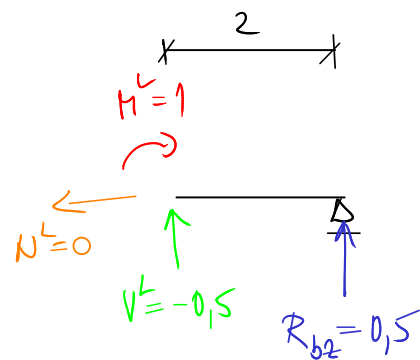
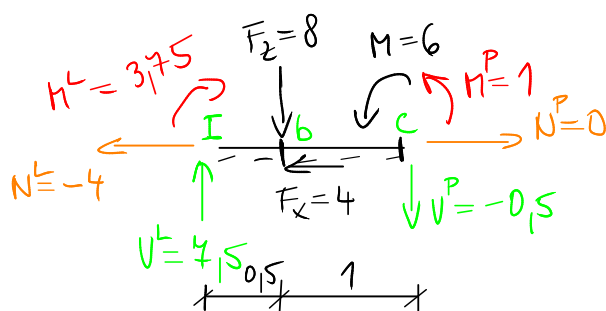
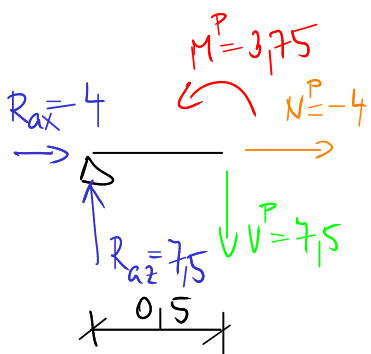
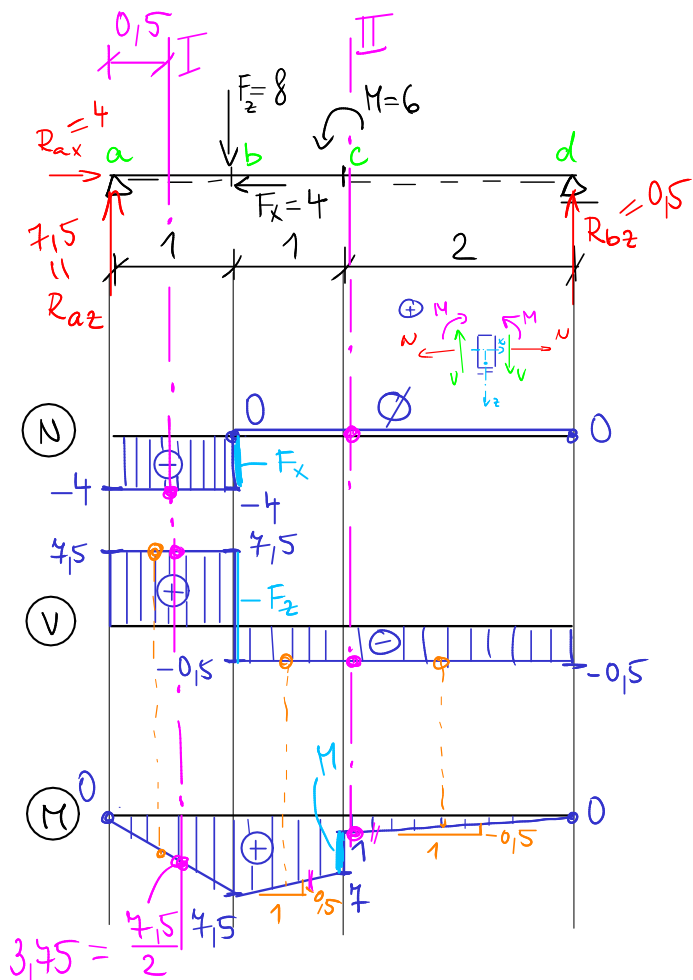
z předchozí hodnoty

$$M_{cb}^L = M_b + \int_c^b V dx (+ \sum M_{c-b})$$

$$M_{cd}^P = M_d - \int_c^d V dx (+ \sum M_{c-d})$$

Pomocí řezů I a II rozdělím
kci na 3 části.

- překreslíme částí kce
s prostorem mezi řezy
- v místě řezů doplníme
vnitřní síly podle
konvence a hodnoty
odečteme z průběhů
vnitřních sil



Dále se budeme zabývat pouze prostřední částí, stejně lze postupovat i u ostatních

- musí platit rovnováha $\sum F_{xi} = 0 \oplus \rightarrow$

$$-N^L - F_x + N^P = 0 \quad -(-4) - 4 + 0 = 0 \checkmark$$

$$\sum F_{zi} = 0 \oplus \downarrow : -V^L + F_z + V^P = 0$$

$$-7.5 + 8 + (-0.5) = 0 \checkmark$$

$$\sum M_{Ii} = 0 \oplus \curvearrowright : M^L + F_z \cdot 0.5 - M - M^P + V^P \cdot 1.5 = 0$$

$$3.75 + 8 \cdot 0.5 - 6 - 1 + (-0.5) \cdot 1.5 = 0 \checkmark$$

$$\bullet \quad M_b^L = M^L + V^L \cdot 0.5 = 3.75 + \frac{7.5}{2} = \underline{7.5 \text{ Nm}} \checkmark$$

$$\bullet \quad V_{bc}^L = V^L - F_z = 7.5 - 8 = \underline{-0.5 \text{ N}} \checkmark$$