

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

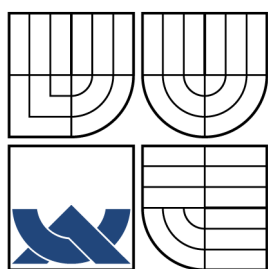
FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

STATISTICKÉ ASPEKTY MODERNÍCH KOMPOZITNÍCH
MATERIÁLŮ

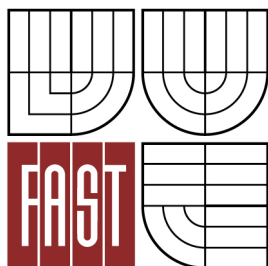
DOKTORSKÁ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ing. VÁCLAV SADÍLEK



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY



FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

STATISTICKÉ ASPEKTY MODERNÍCH KOMPOZITNÍCH MATERIÁLŮ

STATISTICAL ASPECTS OF MODERN COMPOSITE MATERIALS

DOKTORSKÁ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ing. VÁCLAV SADÍLEK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. MIROSLAV VOŘECHOVSKÝ, Ph.D.

BRNO 2012

ABSTRAKT

Práce se zabývá vybranými statistickými aspekty kompozitů s kvazikřehkou nebo křehkou maticí vyztuženou krátkými vlákny nebo textilními rohožemi z vysokopevnostních vláken. Práce je rozdělena do tří částí: (i) určení statistik počtu vláken, která přemostují trhlinu a výpočet síly, kterou jsou tato vlákna schopna přenést (krátká vlákna); (ii) statistické vyhodnocení experimentálních dat svazků skleněných vláken zalitých v matici a získání parametrů, které je možné použít pro odhad střední odezvy při vytahování tohoto vlákna z cementové matrice (svazky vláken z textilních rohoží); (iii) počítačová implementace výpočtu statistik (střední hodnota, směrodatná odchylka) funkce nezávislých náhodných veličin (vícerozměrný integrál) v programovacím jazyce Python.

KLÍČOVÁ SLOVA

Vláknobeton, drátkobeton, textilní beton, vlákna, svazky vláken, počet vláken přemostujících trhlinu, vícerozměrná integrace, střední odezva svazku

ABSTRACT

The thesis focuses on selected problems in composites with quasi-brittle or brittle matrix and reinforced with short fibers or textiles. It is divided into three parts: (i) derivation of the probabilistic density functions for a random number of fibers bridging a crack in a composite and evaluation of the random force carried by these fibers; (ii) statistical analysis of experimentally obtained data of AR-glass yarns embedded in a matrix and evaluation of yarn parameters needed for prediction of the mean (pullout) response and; (iii) implementation of multidimensional integration designed for evaluation of statistical characteristics (mean value, standard deviation) of functions with random inputs in high-level programming language Python.

KEYWORDS

Short Fiber Reinforced Concrete (FRC), textile reinforced concrete (TRC), fibers, multifilament yarns, number of fibers bridging a crack, multidimensional integration, mean response function

SADÍLEK, Václav *Statistické aspekty moderních kompozitních materiálů*: doktorská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, 2012. 104 s. Vedoucí práce: doc. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou doktorskou práci na téma „Statistické aspekty moderních kompozitních materiálů“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího doktorské práce a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

Brno

.....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu dizertační práce panu doc. Ing. Miroslavu Vořechovskému, Ph.D. za odborné konzultace, ochotu a trpělivost při vedení mé dizertační práce. Děkuji také Dr. Rostislavu Chudobovi za možnost spolupráce na zajímavém tématu a odborné konzultace během naší spolupráce a během mé stáže na RWTH Aachen v Německu.

Práce vznikla v rámci projektů:

GA ČR 103/09/H085

GA ČR P105/10/J028

FAST-S-10-37, FAST-J-10-3, FAST-S-11-56

OBSAH

Obsah	9
Úvod	19
1 Kompozit s krátkými vlákny porušený trhlinou	23
1.1 Geometrie náhodně rozmístěných vláken	24
1.1.1 Poloha vlákna nezávislá na jeho natočení (varianta A)	26
1.1.2 Poloha vlákna závislá na jeho natočení (varianta B)	26
1.2 Pravděpodobnost průniku vlákna s rovinou	27
1.2.1 Poloha vlákna závislá na jeho natočení (varianta A)	28
1.2.2 Poloha vlákna nezávislá na jeho natočení (varianta B)	29
1.3 Počet vláken protínajících rovinu	30
1.4 Geometrie vláken protínajících rovinu	30
1.5 Náhodná síla přenášená vláknem	33
1.6 Střední hodnota a rozptyl síly přenášené přemosťujícími vlákny . . .	35
1.7 Numerický příklad – kompozit vyztužený ocelovými drátky	36
2 Statistické vyhodnocení parametrů svazků vláken	39
2.1 Experimentální data	39
2.2 Analyzované parametry svazků vláken	40
2.2.1 Poloměr	42
2.2.2 Kontakt s matricí	42
2.2.3 Volná délka	43
2.2.4 Relativní protažení vlákna před jeho aktivací	43
2.3 YMBMicro	44
3 Výpočet statistik funkce nezávislých náhodných veličin	47
3.1 Diskretizace domény náhodných veličin	48
3.1.1 Rovnoměrné dělení domény náhodných veličin (TGrid)	48
3.1.2 Nerovnoměrné dělení domény náhodných veličin s konstantní pravděpodobnosti π_{ij} (PGrid)	48
3.1.3 Klasická metoda Monte-Carlo (MCS)	49
3.1.4 Latin Hypercube Sampling (LHS)	49
3.2 Implementace v jazyce Python – rovnoměrné dělení domény	50

3.3	Zobecnění implementace pro různé typy diskretizace	55
3.4	SPIRRID	58
3.5	Propojení jednotlivých částí balíčku SPIRRID	61
3.6	Testování aplikace SPIRRID	62
3.6.1	Dvouparametrická funkce odezvy	63
3.6.2	Pětiparametrická funkce odezvy	67
4	Závěr	71
	Literatura	73
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	79
	Seznam příloh	83
A	YMBMicro	85
A.1	Charakteristiky skleněných vláken	89
A.1.1	Vlákno MAG	89
A.1.2	Vlákno VET 1	91
A.1.3	Vlákno VET 2	93
A.1.4	Vlákno VET 3	95
	Životopis	97
	Vlastní publikované práce	101

SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Prototyp konstrukce z textilního betonu (Aachen). [15]	20
2	Most z textilního betonu v Kempten (Allgäu), délka 17 m, výroba laminováním a stříkáním.	21
1.1	Geometrie – (a) Umístění souřadného systému uvnitř vzorku o objemu $L_x L_y L_z$. (b) Popis natočení vlákna pro vhodný počítačové simulace: $\ell_x = \ell \cos(\varphi_x)$, $\ell_y = \ell \sin(\theta) \sin(\varphi_x)$, $\ell_z = \ell \cos(\theta) \sin(\varphi_x)$. (c) Popis natočení vlákna vzhledem k souřadným osám (úhly): $\ell_x = \ell \cos(\varphi_x)$, $\ell_y = \ell \cos(\varphi_y)$, $\ell_z = \ell \cos(\varphi_z)$.	25
1.2	Vlákny vyztužený vzorek simulovaný metodou Monte Carlo – pohled ve směru osy y . Vlevo – vlákna mohou protínat okraje vzorku (varianta (A)). Vpravo – všechna vlákna jsou uvnitř vzorku (varianta (B)).	25
1.3	Vlevo: výsledná integrační oblast omezená indikátorovou funkcí ($\delta = 0$). Vpravo: porovnání pravděpodobností varianty A a B (již pro $\frac{L}{\ell} > 100$ je pravděpodobnost varianty B velmi blízká pravděpodobnosti varianty A).	29
1.4	(a) Vlákna náhodně rozmístěná uvnitř 3D objemu protnutého rovinou (trhlinou). (b) Pohled na řeznou rovinu – tvar průřezové plochy vláken.	31
1.5	Vlevo: Vláknem protínající rovinu trhliny. Vpravo: Trhlina přemostěná k vlákny. (ℓ_e – kotevní délka, w – šířka rozevření trhliny, φ_c – úhel natočení vlákna protínajícího rovinu od její normály, P_1 – síla přenášená jedním vláknem, P_k – síla přenášená k vlákny)	31
1.6	Histogram úhlu vláken protínajících trhlinu proložený hustotou definovanou v (28) a (30). Vlevo: varianta A a uprostřed: varianta B pro $L \approx 6\ell$. Vpravo: varianta B pro $L \approx 2\ell$.	32
1.7	Vlevo: Předpis pro kontakt s maticí. Uprostřed: pullout oboustranně uchyceného krátkého vlákna $\ell_e = \ell/2 = 8.5$ mm a $\varphi = 0$ rad. Vpravo: Střední odezva jednoho vlákna protínajícího trhlinu s parametry: kotevní délka ℓ_e a úhel natočení φ_c , které jsou uvažovány jako náhodné veličiny. Do výpočtu vstupují následující parametry: $d = 0.3$ mm, $E = 200$ GPa, $\tau_{fr} = 1.76$ MPa, $\tau = 1.659$ kN/m, $f = 0.03$.	34

1.8	Histogram náhodného počtu vláken protínajících rovinu (10 000 simulací Monte Carlo) – aproximace pomocí binomického, Poissonova a normálního rozdělení.	37
2.1	Snímky řezu svazku vláken v matici pořízené elektronovým mikroskopem. Vlevo: MAG, vpravo: VET. (bílé kruhy = vlákna, černé plochy = vzduch, šedé plochy = cementová matrice)	39
2.2	Dělení obvodu kolem analyzovaného vlákna pro identifikaci míry kontaktu s maticí. Modrá oblast znázorňuje kontakt s maticí, identifikovaná míra kontaktu podle ilustrace je $14/36 = 38.\bar{8}\%$	40
2.3	Rekonstruované modely svazků obou typů vláken z informací identifikovaných z jednotlivých SEM snímků. Vlevo: MAG, vpravo: VET. (0 – bez kontaktu, 1 – dokonalý kontakt)	41
2.4	Odhad autokorelační funkce míry kontaktu s maticí. Vlevo: MAG, vpravo: VET.	41
2.5	Histogramy poloměrů vláken ze všech řezů provedených na svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.	42
2.6	Histogramy míry kontaktu s maticí celého svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.	42
2.7	Vzorové vlákno s vyznačenými hodnotami míry kontaktu s maticí a z toho vyplývající volnou délkou l_x . ($c_{\text{lim}} = 0.5$)	43
2.8	Histogram volných délek vláken vyhodnocený v řezu uprostřed svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.	44
2.9	Určení vlnitosti pro vzorový úsek vlákna bez kontaktu s maticí.	44
2.10	Histogram vlnitosti vyhodnocený v řezu uprostřed svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.	44
2.11	Schéma balíčku YMBMicro a propojení jednotlivých částí.	45
3.1	Schéma znázorňující princip získání hodnot náhodné veličiny X inverzní transformací: metoda Monte Carlo (MCS, vlevo) a Latin Hypercube Sampling (vpravo).	49
3.2	Vlevo: Odezva vlákna definovaná dvouparametrickou funkcí (lineárně pružné vlákno s definovaným mezním přetvořením). Vpravo: Střední odezva jednoho vlákna (černá silná čára) a vybrané simulace funkce odezvy jednoho vlákna (šedé křivky).	50
3.3	„Broadcasting“ – znázornění principu expanze polí na jejich součinu (analogicky ostatní operace (+, -, /)).	54

3.4	Rastr pokrývající náhodnou doménu a vypočtená střední odezva pro dané integrační schéma dvouparametrické funkce odezvy (rastrové typy).	58
3.5	Pokrytí náhodné domény integračními body a vypočtená střední odezva pro dané integrační schéma (Monte Carlo metody).	59
3.6	UML diagram tříd obecné implementace algoritmu vícerozměrné numerické integrace.	60
3.7	Uživatelské rozhraní instance třídy SPIRRID.	63
3.8	Dvouparametrická funkce odezvy – střední odezva pro čtyři typy diskretizace při $n_{sim} = 10^2$ (vlevo). Rychlost výpočtu v závislosti na počtu simulací (vpravo). ($n_\varepsilon = 80$)	65
3.9	Grafy konvergence k přesnému řešení, v závislosti na počtu simulací, lokální (16) a globální (17) chyby.	65
3.10	Grafy konvergence k přesnému řešení, v závislosti na výpočtovém čase, lokální (16) a globální (17) chyby.	66
3.11	Porovnání výpočtového času pro LHS a PGrid potřebný v prvním a druhém běhu výpočtu integrálu dvouparametrické funkce odezvy pro varianty <code>numpy</code> , <code>cython</code> a <code>weave</code> ($n_\varepsilon = 80$). Dole: přidány argumenty kompilátoru <code>-NDEBUG -fwrapv -O3 -march=native -ffast-math</code>	67
3.12	Pětiparametrická funkce odezvy – střední odezva pro čtyři typy diskretizace při $n_{sim} = 5^5$ (vlevo). Rychlost výpočtu v závislosti na počtu simulací (vpravo). ($n_\varepsilon = 40$)	68
3.13	Porovnání výpočtového času pro LHS a PGrid potřebný v prvním a druhém běhu výpočtu integrálu pětiparametrické funkce odezvy pro varianty <code>numpy</code> , <code>cython</code> a <code>weave</code> ($n_\varepsilon = 40$). Dole: přidány argumenty kompilátoru <code>-NDEBUG -fwrapv -O3 -march=native -ffast-math</code>	69
3.14	Střední odezva (černá křivka) pro různé typy diskretizace domény náhodných veličin. Vybrané simulace (šedé křivky) funkce odezvy jednoho vlákna z $n_{sim} = 10^5$. Přesné řešení (čárkovaná černá křivka) získané pomocí numerických simulací metodou LHS. ($n_\varepsilon = 40$)	70
A.1	Okno pro zobrazení rekonstruovaného 3D modelu vlákna. Barevná škála umožňuje zobrazení hodnot zjištěných parametrů v řezech provedených po délce vlákna. Posuvníkem lze měnit množství zobrazovaných vláken.	85

A.2	Zobrazení hodnot parametrů ve vybraném řezu/segmentu. Na obrázku je krajní řez svazku a barevná škála zobrazuje poloměr vlákna.	85
A.3	Možný způsob kontroly správnosti identifikované polohy a určených parametrů – porovnání dat se snímkem z elektronového mikroskopu. Barevná škála zobrazuje míru kontaktu s matricí.	86
A.4	Statistické vyhodnocení parametrů vlákna – histogram, střední hodnota a směrodatná odchylka. Statistiku lze vyhodnocovat v řezech/-segmentech, podél vlákna a ze všech dat svazku. Na obrázku je histogram poloměru vláken v krajním řezu svazku.	86
A.5	Bodový graf rozptylu s hodnotou korelace mezi jednotlivými řezy. Posuvníky umožňují volbu analyzovaných řezů.	87
A.6	Graf autokorelační funkce podél délky x svazku vláken. Na obrázku je průběh funkce pro míru kontaktu s matricí.	87
A.7	Modul (instance třídy SPIRRID) pro odhad střední odezvy vlákna z histogramů získaných z dat a definovaných pravděpodobnostních rozdělení (PDF). Střední část okna umožňuje volbu PDF a nastavení jeho parametrů a počtu integračních bodů. Výsledná střední odezva svazku je vykreslena v pravé části okna pro dvě různé hodnoty <code>cf_limit</code> .	88
A.8	3D model svazku vláken. Kruhový svazek, který je stažen omotávkou. Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Omotávka zabraňuje penetraci matrice do svazku, a proto je v kontaktu s matricí především okrajová vrstva vláken.	89
A.9	Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	90
A.10	Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	90
A.11	3D model svazku vláken. Plochý svazek vláken, jehož vlákna jsou rozvolněna (provzdušněna). Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Rozvolnění svazku umožňuje lepší penetraci matrice do svazku.	91
A.12	Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	92
A.13	Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	92

A.14 3D model svazku vláken. Obdélníkový svazek vláken, jehož vlákna jsou rozvolněna. Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Rozvolnění svazku umožňuje lepší penetraci matrice do svazku.	93
A.15 Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	94
A.16 Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	94
A.17 3D model svazku vláken. Kruhový svazek vláken, jehož vlákna jsou stažena omotávkou. Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Omotávka svazku zabraňuje penetraci matrice do svazku.	95
A.18 Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	96
A.19 Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.	96

SEZNAM TABULEK

1.1	Střední hodnoty, rozptyl, směrodatná odchylka a variační koeficient náhodného počtu vláken k , náhodné síly přenášené jedním vláknem P_1 , náhodné síly P_k přenášené vlákny přemosťujícími trhlinu a síla přenášená všemi vlákny bez uvažování variability k	37
3.1	Střední hodnota, směrodatná odchylka a variační koeficient parametrů dvouparametrické funkce odezvy.	64
3.2	Střední hodnota, směrodatná odchylka a variační koeficient parametrů pětiparametrické funkce odezvy.	68

ÚVOD

Mezi nejběžněji používané materiály ve stavebnictví patří beton a jiné podobné kompozity na bázi cementu. Jedná se o vysoce heterogenní materiál s kvazikřehkým chováním. Tyto materiály mají díky svým vlastnostem a výrobní technologii velmi široký rozsah použitelnosti. Jejich hlavní výhodou je možnost dalšího vývoje a přizpůsobení novým funkčním požadavkům vycházejícím z nových způsobů použití v konstrukcích (zdokonalené materiály na bázi cementu, textilní beton, vláknobeton, vysokohodnotný beton, kompozity s tahovým ztužením atd.).

Předložená dizertační práce je zaměřena na vybrané statistické aspekty kompozitů s kvazikřehkou maticí, především kompozitů vyztužených nestrukturovanou krátkou výztuží (drátkobetony, vláknobetony) a strukturovanou výztuží (klasická betonářská výztuž, předpínací výztuž, textilní rohože z vysokopevnostních svazků). Základním požadavkem u moderních kompozitů je duktilní odezva v pozdější fázi zatěžování, která avizuje celkovou poruchu konstrukčního prvku rozvojem velkého množství mikrotrhlin doprovázeným značnou disipací energie.

Beton vyztužený krátkými vlákny (FRC – Fiber Reinforced Concrete) je relativně nový materiál, který rozšiřuje aplikační možnosti betonu. V dnešní době je běžně využíván např. při výrobě průmyslových podlah. Vlákná ve vláknobetonu pozitivně ovlivňují makroskopické chování kompozitu a zvyšují tlakovou a tahovou pevnost, tuhost, lomovou houževnatost, rázovou houževnatost, atd. Tohoto chování je dosaženo přidáním relativně malého množství (1–3 %) vláken do betonové směsi. Vlákná jsou v dnešní době vyráběna z mnoha materiálů různých vlastností: ocel, alkali-rezistentní sklo, aramid, uhlíková vlákna (carbon) atd. Zkušenosti ukazují, že tento objemový podíl vláken dokáže efektivně přemostit vznikající trhliny a zajistí rozvoj mnoha rozprostřených mikrotrhlin. To umožňuje disipovat větší množství energie před dosažením poruchy konstrukce.

Vývojem textilního betonu se aktivně zabývají například pracovníci dvou německých pracovišť (Cáchy, Drážďany), kteří mimo jiné vyvíjejí výztužné textilie ze skla, karbonu, polypropylenu a aramidu. Zkoumání technologie výroby uvedených kompozitů je téžiskem usilovné práce mnoha odborníků. Svazky, které se používají pro výrobu výztužných textilií, se skládají z velkého množství vláken (stovky až tisíce) o průměru v řádu desítek mikrometrů. Tyto textilie se nejčastěji používají jako nenosná výztuž např.: pro výrobu fasádních panelů, potrubí, vyztužení tenkých vrstev (omítek) k zachycení rozvoje mikrotrhlin, u rekonstrukcí, k zesilování kon-



Obr. 1: Prototyp konstrukce z textilního betonu (Aachen). [15]

strukcí aj. Zejména lze vyzdvihnout tvarovou flexibilitu konstrukcí a konstrukčních prvků [15].

Jednou z nejdůležitějších vlastností kompozitů pro návrh konstrukcí je jejich materiálová pevnost a odolnost proti šíření trhlin spolu s velkým deformačním rozsahem při malém poklesu nominálního napětí. Schopnost predikce pevnosti je tedy zcela zásadní pro bezpečný a ekonomický návrh konstrukcí. Velký problém, se kterým se modely pro predikci pevnosti musejí potýkat, je vysoká nepravidelnost vnitřní materiálové struktury, její nahodilost a značný rozptyl vlastností materiálových komponent. Tyto faktory hrají významnou roli při způsobu přenášení namáhání uvnitř materiálu a určitá asynchronnost rozvoje porušení pramenící z heterogenity materiálu je hlavním důvodem specifické mechanické odezvy kompozitů.

Pravděpodobnostní predikce odezvy kompozitu s kvazikřehkou nebo křehkou maticí je důležitá pro bezpečný a ekonomický návrh konstrukce z těchto materiálů. Správný návrh konstrukce je podmíněn volbou vhodného numerického modelu a materiálových parametrů, které umožňují porozumět komplikovaným jevům probíhajícím v kompozitech. Z důvodu problematického bezpečného návrhu konstrukce a neexistence normativních předpisů tyto materiály zatím nejsou běžně používány jako nosná výztuž konstrukčních prvků (kromě některých experimentálních konstrukcí).



Obr. 2: Most z textilního betonu v Kempten (Allgäu), délka 17 m, výroba laminováním a stříkáním.

Proto se využívá kombinace obou způsobů vyztužování: jak běžnou ocelovou výztuží, tak vlákny (příp. drátky). Zkoumání těchto materiálů s přihlédnutím ke statistickým aspektům je důležité pro vývoj normativních předpisů a standardizaci návrhových postupů.

Práce se v kapitole 1 zabývá určením statistik a pravděpodobnostního rozdělení náhodného počtu vláken, kotevní délky a úhlu natočení vláken přemostňujících trhliny. Od uvažování nejjednoduššího případu, kdy jsou krátká vlákna rovnoměrně rozmístěna uvnitř kompozitu a zastoupení úhlů natočení vláken je uvažováno také rovnoměrné. Dalším krokem je zahrnutí vlivů (např. okrajů nebo výrobních procesů), které určitým způsobem ovlivní rovnoměrnost polohy nebo natočení vláken.

Síla přenášená kompozitem porušeným trhlinou závisí na interakci mezi vláknem a matricí. U skleněných vláken jsou to parametry – poloměr, kvalita kontaktu s matricí (contact fraction), volná délka (bond free length) a relativní protažení vlákna před jeho aktivací (slack). V práci je popsán způsob získání statistických dat z experimentů (viz kapitola 2), provedených na několika typech svazků skleněných vláken zalitých v cementové matrici, potřebných pro funkci odezvy svazku vytahovaného z matrice. Tato vlákna jsou používána především jako strukturovaná výztuž ve formě výztužných textilií (textilní beton).

Pro odhad střední hodnoty odezvy vlákna nebo svazku, která je funkcí mnoha nezávislých náhodných veličin, je použit výpočet pomocí vícerozměrných pravděpodobnostních integrálů, viz kapitola 3. Pokročilá počítačová implementace programu

pro výpočet těchto integrálů je provedena v programovacím jazyce Python a C.

1 KOMPOZIT S KRÁTKÝMI VLÁKNY PORUŠENÝ TRHLINOU

Využití kompozitů vyztužených krátkými, ale i průběžnými vlákny se v posledních několika letech rychle rozvíjí. Rozšiřuje se oblast jejich použití v praxi a s tím souvisí i potřeba jejich spolehlivého a ekonomického návrhu. Mechanická odezva kompozitu na tahové namáhání je závislá na mnoha faktorech: (i) náhodná poloha a natočení vláken přemostující trhlinu v kompozitu a (ii) interakce vlákna s matricí. Poloha a orientace vláken je ovlivněna jejich tvarem a délkou, složením směsi a výrobním procesem. Během vytahování vlákna z matrice dochází k následujícím jevům: rozpojování vlákna a matrice (debonding), vytahování vlákna z matrice (pullout), ohyb vlákna, poškození vlákna a poškození matrice (matrix spalling). Publikované práce se zabývají vysvětlením jednotlivých jevů, ale i více interagujícími jevy [25, 26, 27].

Výpočet počtu vláken přemostujících rovinu trhliny ve vzorku obdélníkového průřezu z celkového počtu vláken je v práci [12] prováděn pomocí koeficientu orientace. Tuto úlohu je možné řešit využitím stereologie [44, 45, 46] Tímto postupem je získán průměrný počet vláken přemostujících rovinu, ale chybí informace o jeho variabilitě.

Jako základní experiment pro získání informací o chování kompozitu vyztuženého krátkými vlákny je vytahování vlákna z matrice (pullout). Článek [42] popisuje dva přístupy řešení rozpojování vláken s matricí (debonding): (i) pomocí napětí na rozhraní vlákna a matrice nebo (ii) na základě energetické rovnováhy. Publikace [26, 27] popisují mikromechanický model pro chování křehké matrice náhodně vyztužené krátkými vlákny při rozvoji trhlin. Tyto modely zahrnují vliv vytahování vlákna z matrice, vliv natočení a porušení vlákna. V práci [25] je navíc uvažováno s ohybem vlákna a poškozováním matrice. Tyto přístupy uvažují variabilitu způsobenou vlivem rozptýlu odezvy jednoho vlákna, ale neuvažují vliv variability celkového počtu vláken přemostujících rovinu.

V této kapitole bude popsán postup určení počtu vláken přemostujících rovinu trhliny na základě: (a) známé geometrie vzorku a vláken a jejich objemovém podílu a (b) náhodné poloze a natočení vlákna uvnitř vzorku vyztuženého krátkými vlákny. Bude popsána geometrie vzorku a vlákna, způsob definování polohy vlákna a jeho natočení a výpočet pravděpodobnosti průniku vlákna s rovinou trhliny.

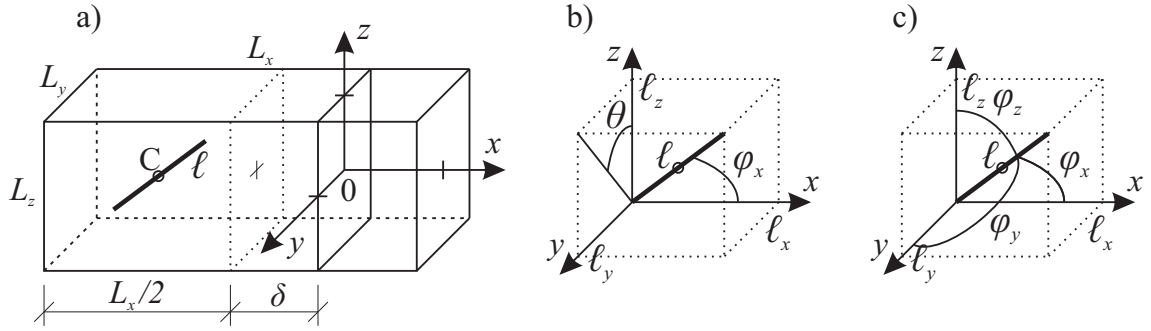
Abychom mohli správně stanovit (náhodnou) sílu přenášenou vlákny, která přemostují rovinu trhliny, musíme zjistit (a) kolik vláken skutečně přemostuje rovinu

trhliny, (b) jejich natočení a polohu vzhledem k rovině trhliny a (c) závislost síly jednoho vlákna na náhodných parametrech interakce vlákna s matricí. Předpoklady použité v této kapitole jsou: (i) možné průniky vláken uvnitř kompozitu jsou ignorovány vzhledem k relativně malému objemovému podílu vláken, a proto jsou vlákna uvažována jako nezávislá; (ii) natočení a poloha vláken je homogenní uvnitř celého objemu, tj. neuvažujeme např. závislost natočení vláken ve směru toku směsi (viz [4, 41, 50]), (iii) neuvažujeme shluky vláken, které mohou vzniknout během výrobního procesu a (iv) uvažujeme přímé vlákno, neuvažujeme tvarovaná vlákna a vlákna s koncovou úpravou ([38] – zahnutá vlákna, [28] – vlnitá vlákna). Odvozené analytické vztahy jsou ověřeny numerickými simulacemi na konkrétním vzorku a výsledky jsou uvedeny v poslední části této kapitoly.

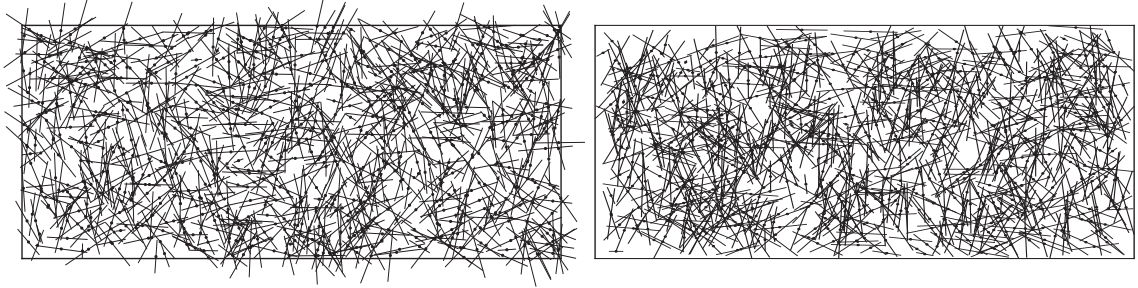
1.1 Geometrie náhodně rozmístěných vláken

Uvažujme kompozit ve tvaru kvádrů o objemu $V_t = L_x L_y L_z$ (viz obr. 1.1a). Všechny tři délky stran jsou uvažovány delší než dvojnásobek délky vlákna ℓ . Počátek souřadného systému je umístěn v místě řezné roviny (nebo též roviny trhliny) a posun vzorku je prováděn ve směru osy x o posun δ zatímco souřadný systém zůstává nezměněn (posun δ splňuje podmínku $|\delta| \leq L_x/2$). Poloha a orientace každého vlákna uvnitř třírozměrného vlákna vyztuženého vzorku může být jednoznačně popsána pomocí pěti proměnných. Každé vlákno může být definováno pomocí tří kartézských souřadnic polohy středu vlákna x , y a z a párem nezávislých úhlů jeho natočení, viz obr. 1.1. Ze všech možných dvojic úhlů byl v této práci zvolen: (i) úhel φ_x mezi vláknem a osou x a (ii) úhel φ_y mezi vláknem a osou y , viz obr. 1.1c. Předpokládáme náhodné rozmístění a natočení vláken uvnitř objemu vzorku, a proto s těmito pěti geometrickými deskriptory pracujeme jako s náhodnými veličinami.

Předpokládejme, že středy vláken jsou zcela rovnoměrně rozmístěny uvnitř objemu vzorku. Natočení vláken a souřadnice polohy jejich středů x , y a z jsou nezávislé náhodné veličiny. Předpokládejme dva různé případy rozmístění vláken uvnitř vzorku: (A) středy vláken jsou rovnoměrně rozmístěny uvnitř celého objemu vzorku (vlákna mohou přesahovat okraje vzorku, viz obr. 1.2 vlevo) a (B) středy vláken jsou rovnoměrně umístěny v intervalu, který je upraven v závislosti na úhlu natočení vláken tak, aby všechna vlákna byla uvnitř vzorku (obr. 1.2 vpravo). U obou alternativ je předpokládáno rozdělení úhlu natočení nezávislé na souřadnicích středů vláken x , y a z .



Obr. 1.1: Geometrie – (a) Umístění souřadného systému uvnitř vzorku o objemu $L_x L_y L_z$. (b) Popis natočení vlákna pro vhodný počítačové simulace: $\ell_x = \ell \cos(\varphi_x)$, $\ell_y = \ell \sin(\theta) \sin(\varphi_x)$, $\ell_z = \ell \cos(\theta) \sin(\varphi_x)$. (c) Popis natočení vlákna vzhledem k souřadným osám (úhly): $\ell_x = \ell \cos(\varphi_x)$, $\ell_y = \ell \cos(\varphi_y)$, $\ell_z = \ell \cos(\varphi_z)$.



Obr. 1.2: Vlákna vyztužený vzorek simulovaný metodou Monte Carlo – pohled ve směru osy y . Vlevo – vlákna mohou protínat okraje vzorku (varianta (A)). Vpravo – všechna vlákna jsou uvnitř vzorku (varianta (B)).

Abychom mohli najít rozdělovací funkci dvou úhlů, které vedou k rovnoměrnému zastoupení všech možných natočení vláken, definujeme hustotu pravděpodobnosti úhlu φ_x jako:

$$f_{\varphi_x}(\varphi_x) = \begin{cases} \sin \varphi_x & \text{pro } \varphi_x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (1)$$

a hustotu pravděpodobnosti úhlu φ_y , který je nezávislý na úhlu φ_x , jako:

$$f_{\varphi_y}(\varphi_y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin \varphi_y & \text{pro } \varphi_y \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (2)$$

Tím je dosaženo rovnoměrného zastoupení všech úhlů. Poznamenejme, že při počítačovém generování je vhodné pracovat s úhlem θ rovnoměrně rozděleným na intervalu $(0, 2\pi)$ namísto úhlu φ_y , viz obr. 1.1b.

1.1.1 Poloha vlákna nezávislá na jeho natočení (varianta A)

Na základě znalosti hustot dvou nezávislých úhlů můžeme sestavit sdružené hustoty pravděpodobnosti polohy a natočení vlákna. Sdružená hustota pravděpodobnosti všech pěti nezávislých veličin polohy a natočení je dána součinem pěti marginálních hustot:

$$f_{xyz\varphi_x\varphi_y}^A(x, y, z, \varphi_x, \varphi_y) = \sin(\varphi_x) \frac{\sin(\varphi_y)}{2} \frac{1}{L_x L_y L_z} \quad (3)$$

Z této sdružené hustoty lze získat např. hustotu náhodné veličiny x (náhodná poloha středu vlákna vzhledem k ose x) integrací přes ostatní náhodné veličiny. Toto rozdělení je rovnoměrné na intervalu S^A :

$$S_x^A = \left\langle -\frac{L_x}{2} + \delta; +\frac{L_x}{2} + \delta \right\rangle \quad (4)$$

Zbývající dvě souřadnice jsou rovnoměrně rozdělené na intervalu:

$$S_i^A = \left\langle -\frac{L_i}{2}; +\frac{L_i}{2} \right\rangle \quad (5)$$

kde i je buď souřadnice y nebo z . Marginální hustota pravděpodobnosti veličiny x může být zapsána na intervalu (4) jako:

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{L_x} & \text{pro } x \in S_x^A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (6)$$

1.1.2 Poloha vlákna závislá na jeho natočení (varianta B)

U této varianty je poloha vláken rovnoměrně rozdělená na upravených intervalech délek L_x^* , L_y^* a L_z^* , které jsou závislé na úhlu natočení vlákna φ_x a φ_y :

$$\begin{aligned} L_x^* &= L_x - \ell \cos(\varphi_x) \\ L_y^* &= L_y - \ell |\cos(\varphi_y)| \\ L_z^* &= L_z - \ell \sqrt{1 - (\cos(\varphi_x))^2 - (\cos(\varphi_y))^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Sdružená hustota pravděpodobnosti pro variantu B, zapsaná pomocí všech pěti náhodných parametrů, je následující:

$$f_{xyz\varphi_x\varphi_y}^B(x, y, z, \varphi_x, \varphi_y) = \sin(\varphi_x) \frac{\sin(\varphi_y)}{2} \frac{1}{L_x^*} \frac{1}{L_y^*} \frac{1}{L_z^*} \quad (8)$$

V tomto případě je hustota náhodné veličiny x (náhodná poloha středu vlákna vzhledem k ose x) podmíněnou hustotou pravděpodobnosti x na úhlu natočení φ_x :

$$f_{x|\varphi_x}(x|\varphi_x) = \frac{f_{x\varphi_x}(x, \varphi_x)}{f_{\varphi_x}(\varphi_x)} = \begin{cases} \frac{1}{L_x^*} & \text{pro } x \in S_x^B \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (9)$$

která je rovnoměrně rozdělená na intervalu S^B :

$$S_x^B = \left\langle -\frac{L_x}{2} + \frac{\ell}{2} \cos \varphi_i + \delta; +\frac{L_x}{2} - \frac{\ell}{2} \cos \varphi_x + \delta \right\rangle \quad (10)$$

Poloha zbývajících dvou středů vláken je rovnoměrně rozdělená na intervalech:

$$S_i^B = \left\langle -\frac{L_i}{2} + \frac{\ell}{2} \cos \varphi_i; +\frac{L_i}{2} - \frac{\ell}{2} \cos \varphi_i \right\rangle \quad (11)$$

kde i je buď souřadnice y nebo z .

Pětirozměrná oblast identifikovaných náhodných veličin je specifikována v rovnicích (1), (2), (4) a (10). Integrací sdružené hustoty přes všech pět náhodných veličin snadno ověříme, že se jedná o pravděpodobnostní hustotu, výsledná hodnota integrálu musí být jedna.

Výše definované sdružené hustoty pravděpodobnosti (3) a (8) mohou být použity pro obecný 3D případ. Dále se budeme zabývat pouze případem, ve kterém je řezná rovina (trhlina) kolmá na osu x (viz obr. 1.1a). V tomto konkrétním případě výsledky nezávisí na souřadnicích polohy středu y a z a na natočení φ_y . Souřadnice y a z a úhel natočení φ_y můžeme ignorovat. Poloha vlákna může být popsána pomocí sdružené hustoty pravděpodobnosti dvojice veličin x a φ_x . Upravené sdružené hustoty pravděpodobnosti mohou být získány z (3) a (8) integrací přes všechna možná y , z a φ_y . Sdružená hustota pravděpodobnosti má potom tvar pro variantu A:

$$f_{x\varphi_x}^A(x, \varphi_x) = \frac{\sin(\varphi_x)}{L_x} \quad (12)$$

a pro variantu B je rovna:

$$f_{x\varphi_x}^B(x, \varphi_x) = \frac{\sin(\varphi_x)}{L_x - \ell \cos(\varphi_x)} \quad (13)$$

1.2 Pravděpodobnost průniku vlákna s rovinou

Abychom mohli vypočítat sílu přenášenou vlákny, musíme stanovit celkový počet vláken k , která přemostňují trhlinu (rovinu). Tento počet k je náhodná veličina. Úloha pro výpočet rozdělení počtu vláken k z celkového počtu n vláken uvnitř kompozitu může být zjednodušena na úlohu výpočtu pravděpodobnosti průniku jednoho vlákna s rovinou. Jakmile známe tuto pravděpodobnost p pro určitou polohu roviny, lze pro počet vláken k použít binomické rozdělení. Podmínka průniku vlákna s rovinou je:

$$-\frac{1}{2} \ell \cos \varphi_x \leq x \leq \frac{1}{2} \ell \cos \varphi_x \quad (14)$$

kde $\ell \cos(\varphi_x)$ je průmět vlákna do osy x . Tuto podmínku můžeme zapsat pomocí indikátorové funkce $\mathbf{1}_A(x)$. Indikátorová funkce signalizuje výskyt prvků X v podmnožině A , nabývá hodnotu 1 pro všechny prvky X uvnitř A (průnik) a hodnotu 0 pro všechny členy X mimo podmnožinu A . Matematicky tuto podmínku zapíšeme pomocí indikátorové funkce:

$$\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_A\left(\frac{1}{2}\ell \cos(\varphi_x) - |x|\right) \quad (15)$$

Poznamenejme, že uvažujeme velmi tenké vlákno, a proto vliv průměru je v indikátorové funkci zanedbán. Dále budeme pro zjednodušení zápisu používat následující označení veličin $L \equiv L_x$ a $\varphi \equiv \varphi_x$.

1.2.1 Poloha vlákna závislá na jeho natočení (varianta A)

Pravděpodobnost průniku vlákna s rovinou trhliny se vypočítá jako integrál sdružené hustoty pravděpodobnosti (12), vynásobený indikátorovou funkcí, přes definiční obor všech možných poloh x a natočení φ :

$$p^A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{L}{2}+\delta}^{\frac{L}{2}+\delta} \frac{\sin \varphi}{L} \mathbf{1}_A\left(\frac{\ell}{2} \cos \varphi - |x|\right) dx d\varphi \quad (16)$$

Indikátorová funkce modifikuje meze druhého integrálu, čímž vznikne nová integrační oblast na interval $(-\frac{\ell}{2} \cos(\varphi), \frac{\ell}{2} \cos(\varphi))$, viz obr. 1.3.

Je-li poloha roviny od hranice vzorku vzdálena o polovinu délky vlákna, tj. v intervalu I: $|\delta| < \frac{1}{2}(L - \ell)$, pravděpodobnost protnutí vlákna je nezávislá na poloze δ roviny vzhledem k těžišti vzorku – řešení rovnice (16) má tvar:

$$p_I^A(\delta; \ell; L) = p(\ell; L) = \frac{1}{2} \frac{\ell}{L} \quad (17)$$

Na intervalu II v blízkosti okrajů vzorků, tj. pro $|\delta| \geq \frac{1}{2}(L - \ell)$, se pravděpodobnost snižuje podle vztahu:

$$p_{II}^A(\delta; \ell; L) = \frac{1}{4\ell L} [\ell^2 - 3L^2 - 4\delta\ell + 2L\ell + 12L\delta - 12\delta^2] + \frac{(L - 2\delta)^2}{2\ell L} \quad (18)$$

V limitě, kdy $\delta = \frac{L}{2}$ (okraj vzorku), pravděpodobnost klesá na hodnotu $p = \frac{1}{4} \frac{\ell}{L}$.

1.2.2 Poloha vlákna nezávislá na jeho natočení (varianta B)

Pravděpodobnost průniku vlákna s rovinou je

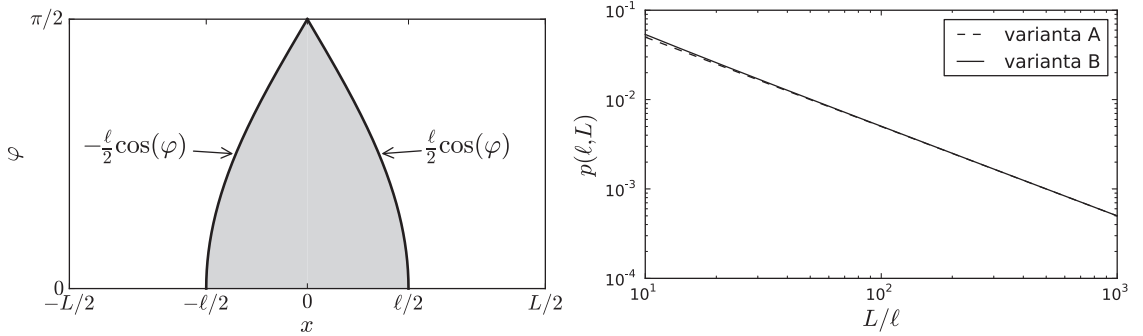
$$p^B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{L}{2} + \delta + \frac{\ell}{2} \cos \varphi}^{\frac{L}{2} + \delta - \frac{\ell}{2} \cos \varphi} \frac{\sin \varphi}{L - \ell \cos \varphi} \mathbf{1}_A(x) dx d\varphi \quad (19)$$

Pokud je délka vzorku alespoň dvakrát větší než délka vlákna ℓ a vzdálenost řezné roviny od okraje vzorku je větší než délka vlákna, tj. $|\delta| < \frac{L}{2} - \ell$, potom interval I je definován jako:

$$|\delta| \leq \frac{1}{2}(L - \ell) \quad \vee \quad |\delta| \geq \frac{1}{2}(L + \ell) \quad (20)$$

Pravděpodobnost (19) na intervalu I je:

$$p_I^B(\delta; \ell; L) = \frac{L}{\ell} \ln \left(\frac{L}{L - \ell} \right) - 1 \quad (21)$$



Obr. 1.3: Vlevo: výsledná integrační oblast omezená indikátorovou funkcí ($\delta = 0$). Vpravo: porovnání pravděpodobností varianty A a B (již pro $\frac{L}{\ell} > 100$ je pravděpodobnost varianty B velmi blízká pravděpodobnosti varianty A).

Správnost tohoto výrazu můžeme snadno ověřit pomocí kontroly asymptotického chování pro $L \rightarrow \infty$. Jestliže délka vzorku roste nade všechny meze, pravděpodobnost p_I^B se blíží pravděpodobnosti p_I^A (viz obr. 1.3vpravo). Jinak, na intervalu II, tj. v blízkosti okrajů vzorku:

$$\delta \geq \ell - \frac{L}{2} \quad \wedge \quad \delta \geq \frac{L}{2} - \ell \quad (22)$$

je pravděpodobnost průniku vlákna s rovinou:

$$p_{II}^B(\delta; \ell; L) = \frac{1}{2\ell} \left[(L + 2\delta) \ln \left(\frac{2}{L + 2\delta} \right) - (\ln(L - \ell) + 1)(L - 2\delta) + 2L \ln(L) \right] \quad (23)$$

1.3 Počet vláken protínajících rovinu

Nyní se budeme zabývat určením počtu vláken k z celkového počtu n vláken uvnitř vzorku, která protínají rovinu (trhlinu) (viz obr. 1.4). Celkový počet vláken n uvnitř kompozitu vypočítáme ze známého objemového podílu vláken v_f , objemu jednoho vlákna V_f a celkového objemu vzorku V_t , což jsou informace známé při výrobě kompozitu:

$$v_f = \frac{nV_f}{V_t} = \frac{nA_f\ell}{A_cL} \Rightarrow n = v_f \frac{A_cL}{A_f\ell} \quad (24)$$

kde A_f je průřezová plocha jednoho vlákna a A_c je průřezová plocha vzorku L_yL_z .

Proces řezání vzorku obsahujícího n vláken může být modelován jako n nezávislých Bernoulliho pokusů s pravděpodobností úspěchu p . Pravděpodobnost p průniku vlákna s rovinou byla odvozena v předchozí části a nabývá hodnot z intervalu $(0, 1)$. Náhodná veličina k má potom binomické rozdělení $\text{Bi}(n, p)$ a pravděpodobnostní funkce p_k náhodného počtu k má tvar:

$$p_k = P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{(n-k)} \quad (25)$$

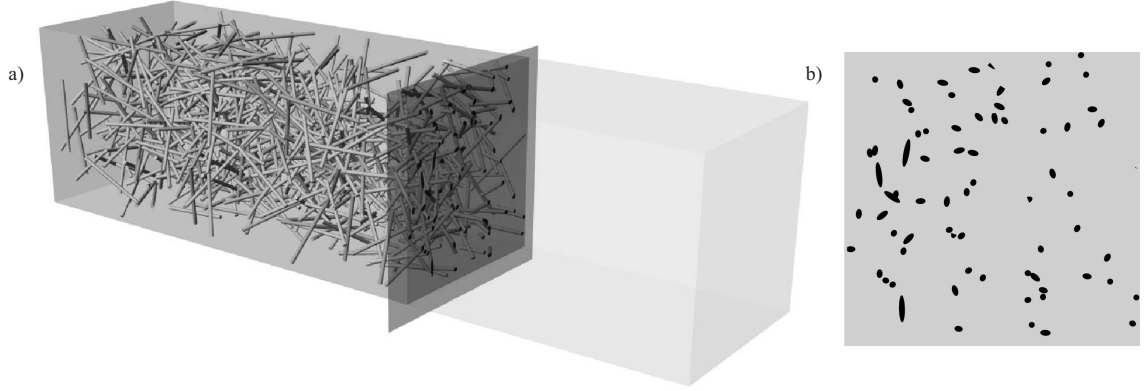
Pro střední hodnotu a rozptyl počtu vláken protínajících rovinu platí:

$$\begin{aligned} E[k] &= \mu_k = np \\ D[k] &= \sigma_k^2 = np(1 - p) \end{aligned} \quad (26)$$

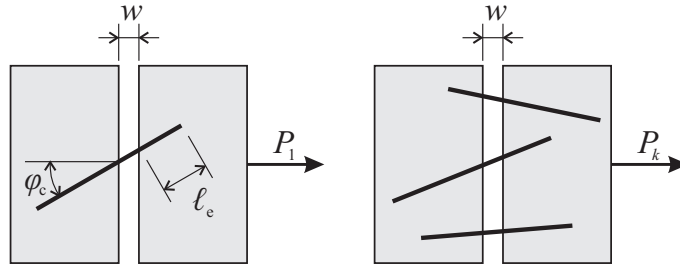
Toto binomické rozdělení může být aproximováno Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = np$. Rozdělení počtu k může být také aproximováno normálním rozdělením se střední hodnotou a rozptylem definovanými v rovnici (26) (obr. 1.8).

1.4 Geometrie vláken protínajících rovinu

V této části budeme zkoumat rozdělení (i) náhodného úhlu a (ii) kotevní délky vláken protínajících rovinu trhliny. Připomeňme, že zde budou uvedeny výsledky pro rovinu umístěnou mimo okrajové zóny, tj. v intervalu I ($|\delta| < \frac{1}{2}(L - \ell)$). Definujme dvě náhodné veličiny: (i) úhel φ_c vlákna, které protíná rovinu a (ii) kotevní délku ℓ_c , což je *kratší z délek* vlákna přemostujícího trhlinu nacházející se nalevo nebo napravo od trhliny (obr. 1.5).



Obr. 1.4: (a) Vlákna náhodně rozmístěná uvnitř 3D objemu protnutého rovinou (trhlinou). (b) Pohled na řeznou rovinu – tvar průřezové plochy vláken.



Obr. 1.5: Vlevo: Vlákno protínající rovinu trhliny. Vpravo: Trhlina přemostěná k vlákny. (ℓ_e – kotevní délka, w – šířka rozevření trhliny, φ_c – úhel natočení vlákna protínajícího rovinu od její normály, P_1 – síla přenášená jedním vláknem, P_k – síla přenášená k vlákny)

Hustota pravděpodobnosti úhlu φ_c může být získána integrací sdružené hustoty pravděpodobnosti (12) nebo (13) násobené indikátorovou funkcí a vydělená pravděpodobností p_I přes oblast x (tj. interval S_x^A (4) nebo S_x^B (10)):

$$f_{\varphi_c}(\varphi) = \frac{1}{p_I} \int_{S_x} f_{x\varphi}(x, \varphi) \mathbf{1}_A \left(\frac{\ell}{2} \cos \varphi - |x| \right) dx \quad (27)$$

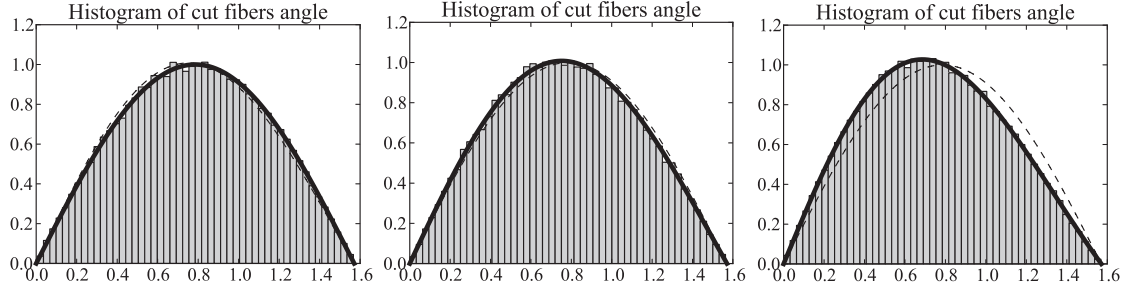
Hustota pravděpodobnosti úhlu φ_c , pod kterým vlákna protínají rovinu je pro variantu A:

$$f_{\varphi_c}^A(\varphi_c) = \begin{cases} \sin(2\varphi_c) & \text{pro } \varphi_c \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (28)$$

Potom střední hodnota (=median=modulus) úhlu φ_c je:

$$E[\varphi_c] = \int_{\varphi_c=0}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c \sin(2\varphi_c) d\varphi_c = \frac{\pi}{4} \quad (29)$$

Jinými slovy, nejfrekventovanější úhel vláken protínajících rovinu je 45° , což je poměrně nepříznivý úhel pro přenos síly vláknem.



Obr. 1.6: Histogram úhlu vláken protínajících trhlinu proložený hustotou definovanou v (28) a (30). Vlevo: varianta A a uprostřed: varianta B pro $L \approx 6\ell$. Vpravo: varianta B pro $L \approx 2\ell$.

U varianty B je hustota úhlu natočení vláken φ_c^B , pod kterým vlákna protínají rovinu:

$$f_{\varphi_c}^B(\varphi_c) = \begin{cases} \frac{\ell \sin(2\varphi_c)}{2(L-\ell \cos \varphi_c) p_1^B} & \text{pro } \varphi_c \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (30)$$

Kotevní délka vlákna ℓ_e se vypočítá ze známé polohy středu vlákna x a jeho natočení φ_x jako:

$$\ell_e = \max \left(0, \frac{\ell}{2} - \frac{|x|}{\cos \varphi_x} \right) \quad (31)$$

Na obrázku 1.6 jsou histogramy z numerických simulací Monte Carlo proloženy analytickým řešením, které přesně aproximuje tvar rozdělení. Pro délky vzorku $L > 10\ell$ se rozdělení varianty B blíží tvaru varianty A. Kotevní délka ℓ_e , ve střední části nosníku (interval I, pro obě varianty), má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, \frac{\ell}{2})$ s hustotou pravděpodobnosti:

$$f_{\ell_e}(\ell_e) = \frac{2}{\ell} \quad (32)$$

a střední hodnota je:

$$E[\ell_e] = \frac{1}{4}\ell \quad (33)$$

Sdružená hustota pravděpodobnosti dvojice (φ_c, ℓ_e) může být jednoduše sestavena, pro střední část vzorku (interval I), jako součin marginálních hustot, tj. součin výrazů (28) a (32) u varianty A:

$$f_{\ell_e, \varphi_c}(\ell_e, \varphi_c) = \begin{cases} \frac{2}{\ell} \sin(2\varphi_c) & \text{pro } \ell_e = \langle 0, \frac{\ell}{2} \rangle, \varphi_c = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (34)$$

a obdobně pro variantu B součin výrazů (30) a (32).

V následujících dvou částech bude popsán jednoduchý mechanický model vlákna, který byl použit pro výpočet síly přenášené vláknem/vláknem. Na jednoduchém analytickém vztahu bude předvedeno určení střední hodnoty (rozptylu) síly přenášené: (i) jedním vláknem a (ii) všemi vlákny přemostujícími trhlinu.

1.5 Náhodná síla přenášená vláknem

Uvažujme kompozit, ve kterém je náhodně umístěno a natočeno vlákno. Zde si popíšeme jak vypočítat náhodnou sílu přenášenou tímto vláknem při rozvoji trhliny. Zvolili jsme jednoduchý analytický model pro výpočet síly, která je přenášena vláknem přemostujícím trhlinu, abychom mohli ukázat použití navrženého pravděpodobnostního přístupu.

Zjednodušený model pro výpočet síly přenášené vláknem vytahovaným z matrice předpokládá ideálně plastický zákon pro soudržnost vlákna s matricí. Zde budou uvedeny pouze výsledné vztahy, podrobnější odvození je uvedeno v [24]. Parametr $\varphi = \varphi_c$ je úhel natočení vlákna od normály roviny trhliny. Síla vznikající při *uvolňování vlákna z matrice* (vzestupná větev grafu na obr. 1.7 uprostřed) je:

$$P_1(w; \varphi) = P_1(w; \varphi_c) = \sqrt{E A_f \tau w} \exp(f\varphi) \quad (35)$$

a síla při *vytahování vlákna z matrice* je aproximována konstantní silou

$$P_1(w; x, \varphi) = P_1(w; \ell_e, \varphi_c) = \tau \ell_e(x) \exp(f\varphi) \quad (36)$$

kde E = modul pružnosti, A_f = průřezová plocha vlákna, $\tau = 2 \pi r \tau_{fr}$ je konstantní třecí síla na jednotkovou délku definovaná jako třecí napětí na jednotkovou plochu násobené obvodem vlákna a f je koeficient vlivu natočení vlákna. Výraz $\exp(f\varphi)$ shrnuje všechny vlivy způsobené natočením vlákna na sílu (snubbing effect) při vytahování vlákna z matrice [27]. Na obrázku 1.7 je uveden předpokládaný zákon pro soudržnost vlákna s matricí (vlevo) a odpovídající odezvu při vytahování krátkého ocelového vlákna (uprostřed) o průměru $d = 0.3$ mm a délce $\ell = 17$ mm; kotevní délka vlákna v matrici je $\ell_e = \ell/2 = 8.5$ mm při horizontální poloze vlákna $\varphi = 0$ rad.

Pro náhodné natočení a polohu vlákna je střední síla přenášená přemostujícími

vlákmem a odpovídající rozptyl (funkce otevření trhliny w):

$$E[P_1(w)] = \mu_{P_1} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\ell/2} P_1(w; \ell_e, \varphi_c) f_{\ell_e, \varphi_c}(\ell_e, \varphi_c) d\ell_e d\varphi_c \quad (37)$$

$$D[P_1(w)] = \sigma_{P_1}^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\ell/2} [P_1(w; \ell_e, \varphi_c) - \mu_{P_1}]^2 f_{\ell_e, \varphi_c}(\ell_e, \varphi_c) d\ell_e d\varphi_c \quad (38)$$

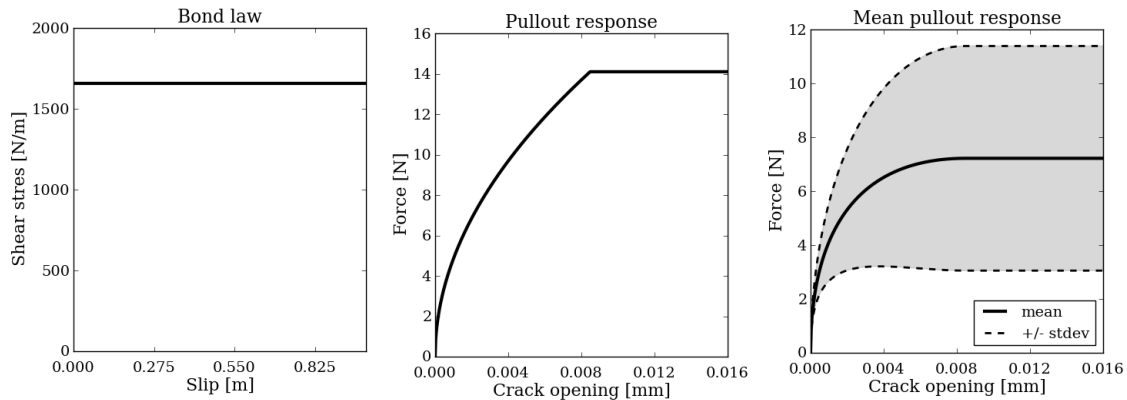
Shodný výsledek získáme integrací přes základní náhodné veličiny x a φ_x , které mají sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f_{x\varphi_x}(x, \varphi_x)$ a použitím podmíněné pravděpodobnosti (sdružená hustota pravděpodobnosti je podělena pravděpodobností p průniku vlákna s trhlinou jak bylo ukázáno výše). Integrace probíhá přes všechny možné souřadnice x a úhly natočení φ_x :

$$E[P_1(w)] = \mu_{P_1} = \int_{\varphi_x} \int_x P_1(w; x, \varphi_x) \frac{f_{x\varphi_x}(x, \varphi_x)}{p} \mathbf{1}_A(x) dx d\varphi_x \quad (39)$$

$$D[P_1(w)] = \sigma_{P_1}^2 = \int_{\varphi_x} \int_x [P_1(w; x, \varphi_x) - \mu_{P_1}]^2 \frac{f_{x\varphi_x}(x, \varphi_x)}{p} \mathbf{1}_A(x) dx d\varphi_x \quad (40)$$

kde $\mathbf{1}_A(x)$ je indikátorová funkce (15).

Na obrázku 1.7 vpravo je střední síla $P_1(w)$ a pás ohraničující plus/mínus směrodatná odchylka.



Obr. 1.7: Vlevo: Předpis pro kontakt s maticí. Uprostřed: pullout oboustranně uchy-
ceného krátkého vlákna $\ell_e = \ell/2 = 8.5$ mm a $\varphi = 0$ rad. Vpravo: Střední odezva
jednoho vlákna protínajícího trhlinu s parametry: kotevní délka ℓ_e a úhel natočení
 φ_c , které jsou uvažovány jako náhodné veličiny. Do výpočtu vstupují následující
parametry: $d = 0.3$ mm, $E = 200$ GPa, $\tau_{fr} = 1.76$ MPa, $\tau = 1.659$ kN/m, $f = 0.03$.

1.6 Střední hodnota a rozptyl síly přenášené přemostujícími vlákny

Výraz pro náhodnou sílu přenášenou jedním vláknem bude nyní využit pro výpočet celkové síly P_k , kterou přenášejí všechna vlákna přemostující trhlinu. Počet k vláken přemostujících trhlinu a příspěvky P_1 jednotlivých vláken jsou náhodné veličiny. Díky paralelnímu zapojení vláken v trhlíně je celková síla P_k přenášená všemi vlákny součet k nezávislých příspěvků sil P_1 :

$$P_k(w) = \sum_{i=1}^k P_{1,i}(w) \quad (41)$$

Jinými slovy, výpočet celkové síly je součet náhodného počtu náhodných příspěvků, které jsou nezávislé a mají stejné rozdělení. Poznamenejme, že bychom se mohli dopustit chyby, pokud bychom celkovou sílu počítali jako součin náhodných veličin k a P_1 . Podle centrálního limitního teorému se suma P_k blíží k normálnímu rozdělení [6, 37]. Jediné parametry, které je potřeba určit jsou střední hodnota a rozptyl veličiny P_k . Střední hodnotu (tower rule) a rozptyl (variance decomposition formula) získáme z následujících výrazů:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E(X|Y)] \\ D[X] &= E[D(X|Y)] + D[E(X|Y)] \end{aligned} \quad (42)$$

V našem případě dosadíme $X = P_k$ a $Y = k$:

$$E\left[\sum_{i=1}^k P_{1,i}\right] = E\left[E\left(\sum_{i=1}^k P_{1,i} | k\right)\right] = E\left[\sum_{i=1}^k P_{1,i}\right] = E[k \cdot E(P_1)] \quad (43)$$

$$\begin{aligned} D\left[\sum_{i=1}^k P_{1,i}\right] &= E\left[D\left(\sum_{i=1}^k P_{1,i} | k\right)\right] + D\left[E\left(\sum_{i=1}^k P_{1,i} | k\right)\right] \\ &= E\left[k \cdot D\left(\sum_{i=1}^k P_{1,i}\right)\right] + D[k \cdot E(P_1)] \end{aligned} \quad (44)$$

Využitím nezávislosti náhodné veličiny k na P_1 můžeme výsledek zapsat jako:

$$\begin{aligned} E[P_k(w)] &= E[k] E[P_1(w)] \\ D[P_k(w)] &= E[k] D[P_1(w)] + D[k] [E[P_1(w)]]^2 \end{aligned} \quad (45)$$

Variační koeficient celkové síly je potom:

$$\text{CoV}(P_k) = \sqrt{D[P_k]} / E[P_k] \quad (46)$$

Poznamenejme, že by nebylo správné počítat odezvu kompozitu jako průměrnou odezvu jedné trhliny, protože variabilita síly P_k nemůže být zanedbána. Tento rozptyl má vliv především při rozvoji více trhlín, což je požadovaná vlastnost kompozitů (např. v ECC – Engineered Cementitious Composites). Celková pevnost kompozitu je dána nejslabší trhlinou ze série trhlín. Použitím modelu nejslabšího článku a s ním související teorií extrémních hodnot nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením je náhodná pevnost kompozitu:

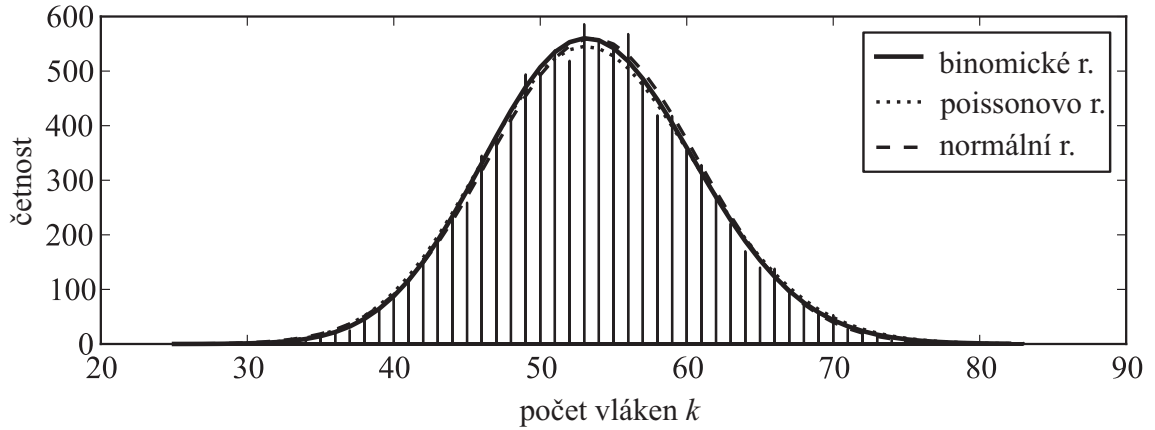
$$P = F_k^{-1} \left(1 - \sqrt[N]{1 - p_f} \right) \quad (47)$$

kde N je počet trhlín, p_f je pravděpodobnost a F_k je distribuční funkce pevnosti jedné trhliny (normální rozdělení se střední hodnotou a rozptylem z (45)). Pro získání mediánu pevnosti celého kompozitu je $p_f = 0.5$. V pracích [26, 27] byla variabilita síly jedné trhliny zanedbána, autoři uvažují celkovou sílu P_k deterministicky jako součin k a P_1 , kde k je průměrný počet vláken přemostujících trhlinu a P_1 je uvažována pomocí její střední hodnoty. Následující část vysvětlí jaké chyby bychom se mohli dopustit, pokud bychom neuvažovali variabilitu náhodných veličin k , P_1 a P_k .

1.7 Numerický příklad – kompozit vyztužený ocelovými drátky

Pro ověření výše získaných analytických výsledků byly provedeny numerické simulace (10 000 simulací metodou Monte Carlo). Uvažujeme vzorek o rozměrech $10 \times 4 \times 4$ cm vyříznutý z dlouhého hranolu o průřezu 4×4 cm. Vzorek je zatěžován jednoosým tahem ve směru hrany $L_x = 0.1$ m. Průřezová plocha je $A_c = 1.6 \cdot 10^{-3}$ m². Vzorek je vyztužen krátkými ocelovými drátky délky $\ell = 0.017$ m a průměrem $d = 0.3$ mm. Průřezová plocha jednoho drátku je $A_f = 7.06858 \cdot 10^{-8}$ m². Uvažovaný objemový podíl vláken (26) je $v_f = 1.5$ %. Modul pružnosti vláken je $E = 200$ GPa a $\tau_{fr} = 1.76$ MPa, viz obr. 1.7.

Pro tyto vstupní parametry je celkový počet vláken (26) v kompozitu $n = 1997$ a pravděpodobnost (17) protnutí jednoho vlákna rovinou kolmou k podélné ose je $p = p(\ell; L) = 0.085$. Střední hodnota počtu k vláken protínajících rovinu trhliny je $E[k] = 169.745$ a rozptyl je $D[k] = 155.32$ (26). Tudiž, směrodatná odchylka a variační koeficient jsou $Std(k) = 12.46$ a $CoV(k) = 7.34$ %. Obrázek 1.8 ukazuje histogram náhodného počtu vláken, který je možné velmi přesně aproximovat pomocí normálního (Poissonova, Binomického) rozdělení, jak bylo uvedeno v části 1.3.



Obr. 1.8: Histogram náhodného počtu vláken protínajících rovinu (10 000 simulací Monte Carlo) – aproximace pomocí binomického, Poissonova a normálního rozdělení.

Střední hodnota maximální síly přenášené jedním vláknem při vytahování z matrice je $E[P_1] = 7.218 \text{ N}$ a rozptyl je $D[P_1] = 17.375 \text{ N}^2$ (37). Směrodatná odchylka je potom $\text{Std}(P_1) = 4.16 \text{ N}$ a variační koeficient je $\text{CoV}(P_1) = 57.7 \%$.

Použitím rovnice (45) je získána střední hodnota síly přenášená vlákny v jedné trhlíně $E[P_k] = 1225.25 \text{ N}$ a rozptyl $D[P_k] = 11041.63 \text{ N}^2$. Směrodatná odchylka a variační koeficient jsou $\text{Std}(P_k) = 105.08 \text{ N}$ a $\text{CoV}(P_k) = 8.58 \%$. Připomeňme,

	k	P_1	P_k	$P_k (k = \text{konst})$
$E[X]$	169.745	7.218	1225.265	1225.25
$D[X]$	155.32	17.375	11041.63	2949.58
$\text{Std}(X)$	16.42	4.16	105.08	54.31
$\text{CoV}(X)$	7.34 %	57.7 %	8.58 %	4.43 %

Tab. 1.1: Střední hodnoty, rozptyl, směrodatná odchylka a variační koeficient náhodného počtu vláken k , náhodné síly přenášené jedním vláknem P_1 , náhodné síly P_k přenášené vlákny přemostujícími trhlínu a síla přenášená všemi vlákny bez uvažování variability k .

že bychom se mohli dopustit chyby, pokud bychom zanedbali rozptyl pocházející z náhodnosti počtu vláken k (a přitom stále uvažujeme rozptyl veličiny P_1). Nyní bude předvedeno, k jakému podhodnocení rozptylu by došlo při tomto zjednodušení. Směrodatná odchylka síly P_k by se spočítala jako $\text{Std}(P_1) \sqrt{k} = 54.31 \text{ N}$ [10, 47] a variační koeficient by klesl na hodnotu 4.43 %, která je přibližně poloviční oproti správné hodnotě, viz tab. 1.1.

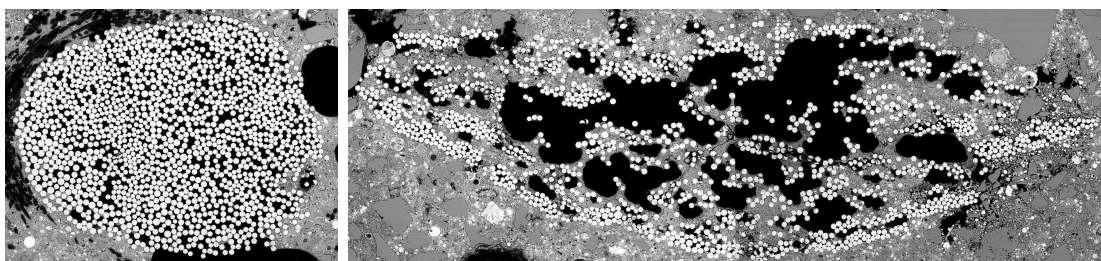
Výsledky kapitoly byly publikovány v jednom recenzovaném časopise [51] a na několika lokálních [65, 66, 68] i zahraničních konferencích [58, 59].

2 STATISTICKÉ VYHODNOCENÍ PARAMETRŮ SVAZKŮ VLÁKEN

Tato kapitola popisuje statistické vyhodnocení experimentálních dat svazků skleněných vláken zalitých v cementové matrici a získání histogramů veličin potřebných pro pravděpodobnostní výpočet odezvy vlákna vytahovaného z matrice (pullout). Tato vlákna jsou obvykle využívána jako strukturovaná výztuž ve formě textilií (textilní beton). Vyhodnocení mikrostruktury v průřezu vlákna bylo prováděno pomocí analýzy obrazových dat získaných elektronovým mikroskopem. YMBMicro (Yarn-Matrix-Bond Microstructure analysis) je program pro analýzu mikrostruktury svazku vláken, který vznikl během mého studijního pobytu na RWTH Aachen pod vedením Dr. Rostislava Chudoby z katedry konstrukčního betonu fakulty stavební.

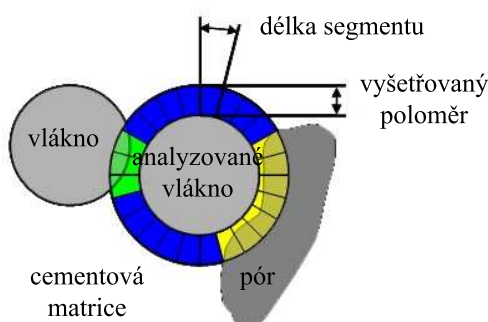
2.1 Experimentální data

Data jsou získána ze vzorků svazků skleněných vláken zalitých do cementové matrice. Vzorek skleněného vlákna zalitého do matrice je zbrušován po úsecích cca 0.5 mm a pomocí elektronového mikroskopu (SEM) jsou tyto řezy (obr. 2.1) snímány a získané snímky jsou analyzovány pomocí softwaru vyvíjeného na RWTH Aachen (Ústav geodézie), který identifikuje polohu vlákna, jeho poloměr, informace o kontaktu s matricí a propojení jednotlivých vláken mezi řezy. Celkově je k dispozici 14 řezů pro každý svazek vláken (délka vzorku je tedy přibližně 7 mm). Příprava vzorků a způsob identifikace je detailněji popsán v článku [23].



Obr. 2.1: Snímky řezu svazku vláken v matrici pořízené elektronovým mikroskopem. Vlevo: MAG, vpravo: VET. (bílé kruhy = vlákna, černé plochy = vzduch, šedé plochy = cementová matrice)

Experimenty jsou provedeny na několika typech vláken. V této kapitole budou uvedeny výsledky dvou typů: (i) MAG a (ii) VET. Svazek MAG má kruhový průřez a je tvořen přibližně $n = 1750$ vlákny, která jsou stažena omotávkou. Omotávka udržuje kompaktní tvar svazku a snižuje tak schopnost proniknutí matrice k vnitřním jeho vláknům. VET je plochý svazek tvořený asi $n = 1450$ vlákny, která jsou rozvolněna, což umožňuje lepší průnik matrice do svazku. Míra kontaktu vlákna s matricí je identifikována podle obrázku 2.2. Kolem vlákna je definována analyzovaná oblast určitého poloměru, která je rozdělena na 36 segmentů. Míra kontaktu je definována jako počet segmentů, do kterých zasahuje matrice ku celkovému počtu segmentů.

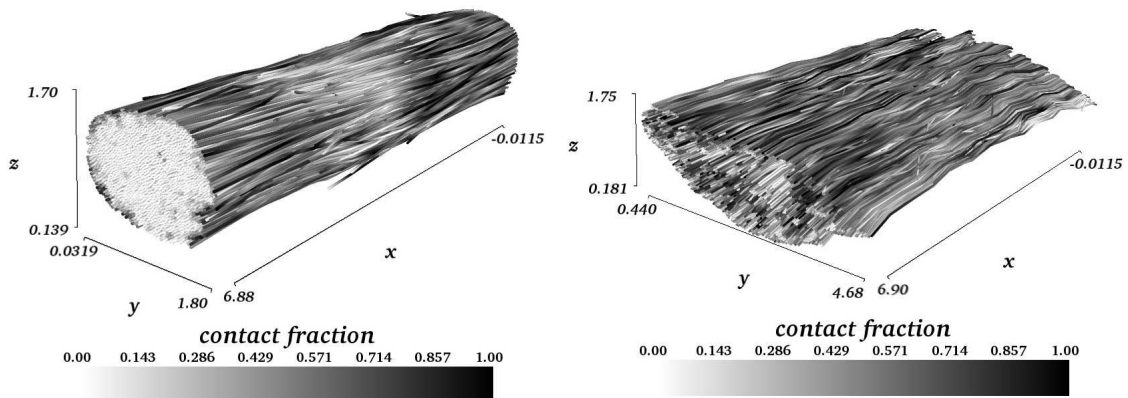


Obr. 2.2: Dělení obvodu kolem analyzovaného vlákna pro identifikaci míry kontaktu s matricí. Modrá oblast znázorňuje kontakt s matricí, identifikovaná míra kontaktu podle ilustrace je $14/36 = 38.\bar{8}\%$.

Na obrázku 2.3 jsou z naidentifikovaných dat rekonstruované modely svazků vláken. Černobílá škála zobrazuje míru kontaktu vlákna s matricí (0 – bez kontaktu, 1 – dokonalý kontakt). Na průřezu svazku MAG (obr. 2.3 vlevo) je vidět velké množství vláken bez kontaktu s matricí (jádro svazku) obepnutých tenkou vrstvou vláken, která jsou v kontaktu s matricí. Na svazku VET (obr. 2.3 vpravo) je zřejmé lepší proniknutí matrice dovnitř svazku díky jeho rozvolněnosti.

2.2 Analyzované parametry svazků vláken

V této části budou popsány vyhodnocované parametry svazků (vláken): (i) hodnoty dostupné v řezech svazku (poloměr a kontakt s matricí) a (ii) parametry podél vlákna (volná délka a relativní protažení). Tyto parametry (náhodné veličiny) mohou být použity jako vstupy pro odhad střední odezvy vlákna vytahovaného z matrice. Pomocí Spearmanova korelačního koeficientu je proveden odhad autokorelační funkce



Obr. 2.3: Rekonstruované modely svazků obou typů vláken z informací identifikovaných z jednotlivých SEM snímků. Vlevo: MAG, vpravo: VET. (0 – bez kontaktu, 1 – dokonalý kontakt)

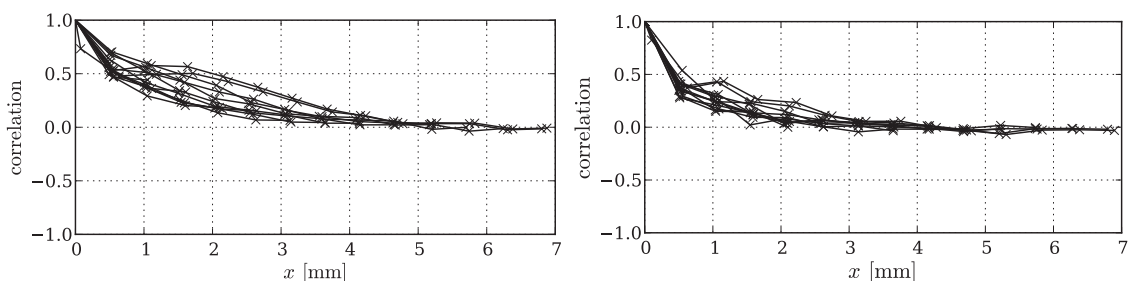
mezi daty získanými v jednotlivých řezech. Spearmanův (neparametrický) korelační koeficient lze vypočítat podle vztahu:

$$\rho_{X,Y} = \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (1)$$

kde X a Y jsou pořadová čísla přiřazená hodnotám náhodné veličiny podle velikosti.

Především nás zajímá korelační koeficient hodnot míry kontaktu s matricí (viz obr. 2.4) mezi jednotlivými řezy. Z odhadnutých autokorelačních funkcí vyplývá, že vzdálenost řezů není větší než autokorelační délka. Korelační koeficient mezi dvěma sousedními řezy u vláken MAG i VET je přibližně 0.5; můžeme tedy říci, že hustota řezů je dostatečná a získaná data jsou interpolovatelná.

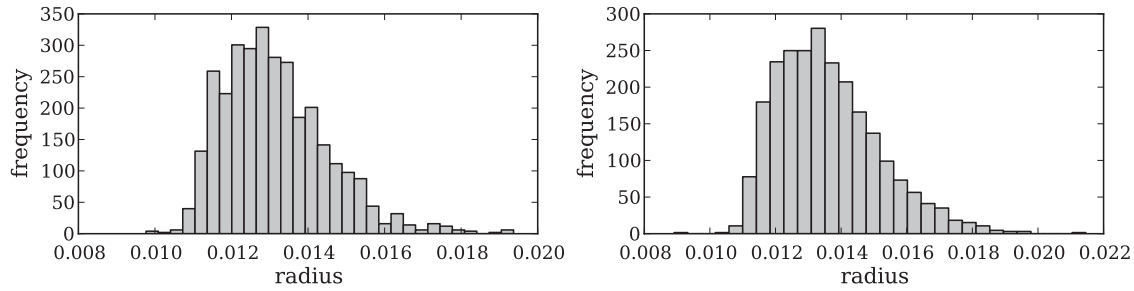
Nyní následuje podrobnější porovnání jednotlivých parametrů pro vzorky MAG a VET bez ohledu na prostorové rozdělení.



Obr. 2.4: Odhad autokorelační funkce míry kontaktu s matricí. Vlevo: MAG, vpravo: VET.

2.2.1 Poloměr

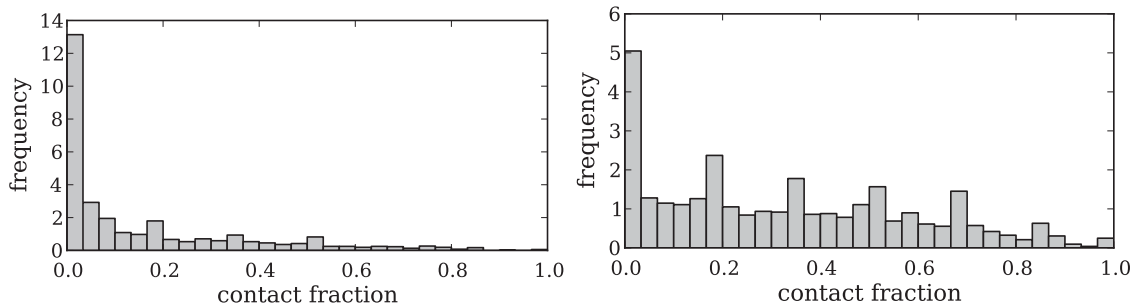
Z experimentálních dat byly získány statistiky poloměrů r vláken. Svazky typu MAG mají střední hodnotu $\mu_r = 1.314 \cdot 10^{-2}$ mm a směrodatnou odchylku $\sigma_r = 1.373 \cdot 10^{-3}$ mm a svazky VET mají střední hodnotu poloměru $\mu_r = 1.359 \cdot 10^{-2}$ mm a směrodatnou odchylku $\sigma_r = 1.567 \cdot 10^{-3}$ mm. Histogramy poloměrů na obr. 2.5 jsou sestaveny ze všech naměřených hodnot na svazku ($\approx 20\,000$).



Obr. 2.5: Histogramy poloměrů vláken ze všech řezů provedených na svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.

2.2.2 Kontakt s matricí

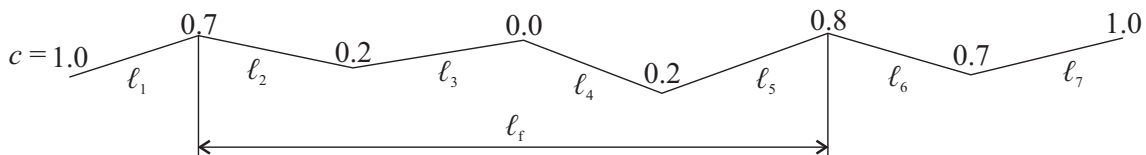
Míra kontaktu s matricí (contact fraction) nabývá hodnot z intervalu $c \in (0, 1)$, tj. kolik procent obvodu vlákna je obaleno matricí (0 – žádný kontakt, 1 – dokonalý kontakt). Na histogramech (obr. 2.6) je vidět, že svazek MAG má velmi velké množství vláken s nulovým kontaktem s matricí (způsobeno stažením svazku omotávkou a z toho vyplývající slabé protečení matrice do svazku), kdežto u svazku VET je kontakt s matricí rovnoměrnější (díky rozvolnění svazku).



Obr. 2.6: Histogramy míry kontaktu s matricí celého svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.

2.2.3 Volná délka

Trajektorie vlákna je dána propojením naidentifikovaných vláken v jednotlivých řezech pomocí lineární interpolace, z čehož se vychází při odvozování následujících veličin – volná délka (bond free length) a relativní protažení vlákna před jeho aktivací (slack). Tyto dva parametry charakterizují vliv nepravidelného proniknutí matrice do vlákna, který významně ovlivňuje efektivní délky jednotlivých vláken, což vede na nerovnoměrné rozdělení přetvoření a napětí v průřezu svazku. Lépe zakotvená vlákna přenášejí vyšší síly než vlákna volná a zvlněná. Parametry jsou vyhodnocovány po délce vlákna a statistiky jsou vyhodnocovány pro jednotlivé segmenty svazku mezi řezy. Jediným parametrem, kterým je možné konfigurovat tyto dvě hodnoty, je limitní hodnota míry kontaktu c_{lim} , která udává kdy je vlákno možné považovat za volné a kdy za uchycené. Dále budeme uvažovat $c_{\text{lim}} = 0.5$, tj. alespoň 50 % obvodu vlákna je v kontaktu s matricí. Volná délka vlákna (obr. 2.7) je definována jako suma dílčích délek mezi dvěma řezy ℓ_i , mezi kterými je míra kontaktu c s matricí menší než limitní hodnota c_{lim} , tedy délka, na které vlákno není uchyceno v matrici. Budeme uvažovat dvě volné délky: skutečná délka $\ell = \sum \ell_i$ a délka získaná sumou průmětů dílčích délek mezi řezy do osy x , $\ell_x = \sum \ell_{ix}$. Na histogramech obr. 2.8 je vidět u svazku MAG zastoupení velkého množství vláken volných v celé délce svazku.



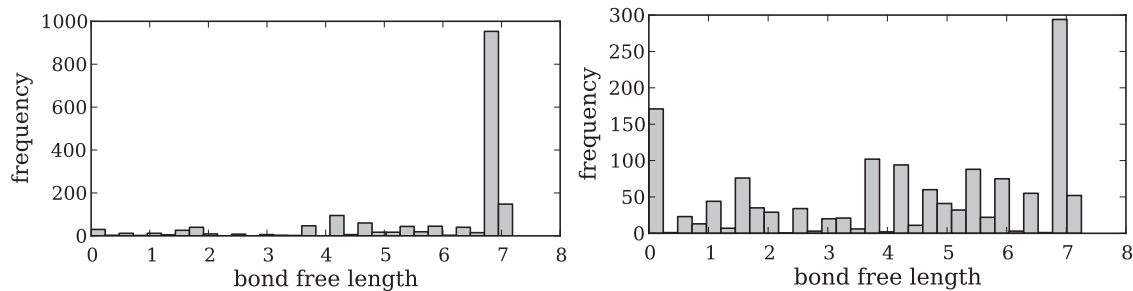
Obr. 2.7: Vzorové vlákno s vyznačenými hodnotami míry kontaktu s matricí a z toho vyplývající volnou délkou ℓ_x . ($c_{\text{lim}} = 0.5$)

2.2.4 Relativní protažení vlákna před jeho aktivací

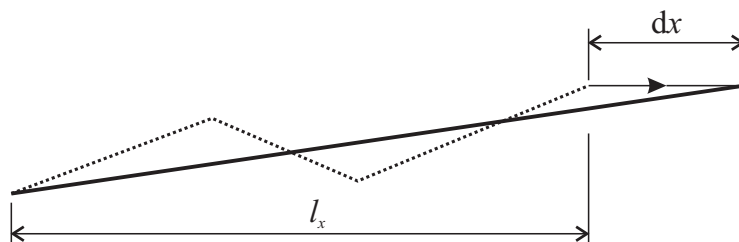
Relativní protažení vlákna (slack) θ je způsobeno jeho vlnitostí (oddaluje začátek přenosu síly vláknem) (obr. 2.9) a je dáno vztahem:

$$\theta = \frac{dx}{\ell_x} \quad (2)$$

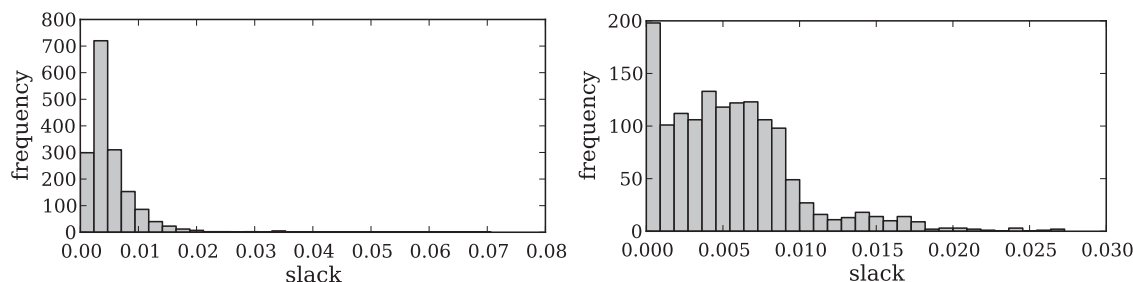
kde dx je posun koncového bodu vlákna, aby došlo k jeho napnutí a ℓ_x je průmět délky vlákna do osy x před jeho napnutím. Histogramy na obr. 2.10 jsou z dat získaných ve středním řezu svazku.



Obr. 2.8: Histogram volných délek vláken vyhodnocený v řezu uprostřed svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.



Obr. 2.9: Určení vlnitosti pro vzorový úsek vlákna bez kontaktu s matricí.



Obr. 2.10: Histogram vlnitosti vyhodnocený v řezu uprostřed svazku. Vlevo: MAG, vpravo: VET.

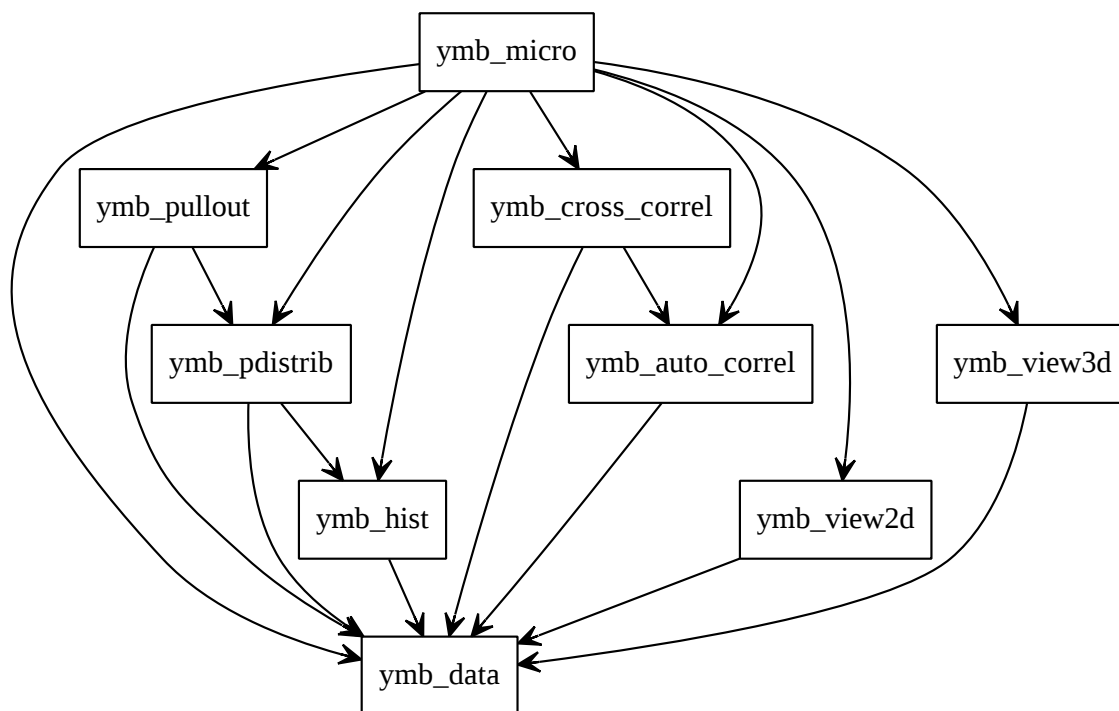
2.3 YMBMicro

YMBMicro (Yarn-Matrix-Bond Microstructure analysis) je počítačová aplikace určená pro analýzu experimentálních dat získaných ze svazků zalitých do cementové matrice, který jsem vytvořil v rámci dizertační práce. Převážná část vývoje programu probíhala během stáže na RWTH Aachen pod vedením Dr. Chudoby. V tomto programu byly vypočteny výše uvedené výsledky. Tento program je vytvořen v programovacím jazyce Python s využitím balíčků:

- Enthought ETS – soubor knihoven pro vytvoření interaktivní a konfigurovatelné aplikace s grafickým uživatelským rozhraním

- NumPy, SciPy – vědecké výpočty, knihovny pro práci s poli
- Matplotlib, Mayavi – 2d a 3d vizualizace

Na obrázku 2.11 je zobrazeno propojení jednotlivých částí balíčku.



Obr. 2.11: Schéma balíčku YMBMicro a propojení jednotlivých částí.

Popis struktury a hlavních částí programu:

- **ymb_data** – obsahuje třídy pro zpracování, kontrolu a vyhodnocení dat; **YMBSource** – načtení dat z textových souborů a jejich základní analýza; **YMBData** (**YMBCutData**, **YMBSegmentData**) – výpočet parametrů, uvedených v předchozí části, ze zdrojových dat; **YMBCutData** – výpočet hodnot parametrů v řezech provedených na svazku a **YMBSegmentData** – výpočet po délce vlákna, které je řez rozděleno na segmenty
- **ymb_view3d** – rekonstrukce 3D modelu svazku pro vizuální kontrolu získaných dat pomocí programu **mayavi** (**YMBView3D**); obr. A.1
- **ymb_view2d** – zobrazení dat a hodnot parametrů na v řezech pro vizuální kontrolu pomocí knihovny **matplotlib** (**YMBView2D**); obr. A.2
- **ymb_hist** – statistické vyhodnocení parametrů (histogramy, střední hodnota, směrodatná hodnota) (**YMBHist**); obr. A.4
- **ymb_auto_correl** – výpočet autokorelační funkce po délce vlákna; obr. A.5 a A.6

- `ymb_pdistrib` – příprava polí s integračními body náhodných parametrů ze získaných histogramů nebo definovaných pravděpodobnostních rozdělení pro `ymb_pullout`; obr. [A.7](#) střední část okna
- `ymb_pullout` – `ymb_pdistrib` předá připravená pole integračních bodů instanci třídy `SPIRRID` stejnojmenného balíčku, který popsán v následující kapitole [3](#), jako parametry funkce odezvy, jejíž odhad střední hodnota je spočítán a zobrazen v grafickém okně uživatelského rozhraní (`YMBPullout`); obr. [A.7](#)

V této kapitole byly popsány výsledky dvou typů vláken MAG a VET. Souhrnné tabulky výsledků čtyř typů vláken jsou uvedeny v příloze [A](#). Výsledky byly publikovány na dvou zahraničních konferencích [[54](#), [55](#)].

3 VÝPOČET STATISTIK FUNKCE NEZÁVISLÝCH NÁHODNÝCH VELIČIN

V předchozích kapitolách byly získány statistické informace o geometrii vláken uvnitř vzorku (kapitola 1) a geometrie vláken ze svazku zalitého v matrici. Získané parametry jsou náhodné veličiny, které vstupují do funkcí pro popis chování vlákna (svazku).

Odezva vlákna je funkcí mnoha nezávislých náhodných veličin. Hledají se statistiky funkce (např. odezvy vlákna), aby bylo možné nalézt např. střední odezvu vlákna a zhodnotit její variabilitu. Problém lze převést na aproximaci pravděpodobnostních integrálů. Cílem je navržení obecné a přitom efektivní implementace kódu, který potřebné pravděpodobnostní integrály vypočítá. Cílem je výpočet statistických momentů náhodné veličiny Q definované jako funkce proměnné ε a náhodných veličin $\theta_1 \dots \theta_n$:

$$Q = q(\varepsilon; \theta_1, \dots, \theta_m) \quad (1)$$

Kontrolní proměnná ε může být i vektorem několika proměnných (posun, čas, poloha, ...). k -tý statistický moment takovéto veličiny je

$$\mu_k(\varepsilon) = \int_{\Theta} [q(\varepsilon; \theta)]^k g(\theta) d\theta. \quad (2)$$

Jelikož jsou zde uvažovány pouze nezávislé náhodné veličiny, můžeme sdruženou hustotu pravděpodobnosti $g(\theta)$ (PDF) nahradit součinem marginálních hustot

$$\mu_k(\varepsilon) = \int_{\Theta_1} \dots \int_{\Theta_m} [q(\varepsilon; \theta)]^k g_1(\theta_1) \dots g_m(\theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m. \quad (3)$$

Integrace je provedena numericky použitím sumy přes diskretizovanou náhodnou oblast

$$\mu_k(\varepsilon) = \sum_{\Theta_1} \dots \sum_{\Theta_m} \underbrace{[q(\varepsilon; \theta_1 \dots \theta_m)]^k}_{Q^k} \underbrace{\Delta G_1(\theta_1) \dots \Delta G_m(\theta_m)}_{\Delta G}, \quad (4)$$

kde $\Delta G_i(\theta_i)$ označuje váhové faktory závislé na typu diskretizace (sampling), které budou uvedeny níže. Rozdělení integračních bodů Θ_i na náhodné doméně může být vyjádřeno jako:

$$\Theta_i = [\theta_{ij}, j \in 1 \dots n_i], \quad i \in 1 \dots m, \quad (5)$$

kde n_i je počet integračních bodů i -té veličiny. Existuje mnoho způsobů jak pokrýt náhodnou doménu pomocí integračních bodů [14, 18, 30, 31, 33, 40]. Čtyři z nich jsou studovány v následujících kapitolách.

3.1 Diskretizace domény náhodných veličin

V této části budou uvedeny a popsány čtyři způsoby diskretizace domény náhodných veličin. Dvě alternativy, které pokrývají vyšetřovanou oblast pomocí rastru hodnot a dvě, které integrovanou oblast pokrývají neuspořádanou (pseudo-náhodnou) množinou bodů.

3.1.1 Rovnoměrné dělení domény náhodných veličin (TGrid)

Doména každé náhodné veličiny je rovnoměrně pokryta hodnotami θ_{ij} . Jednotlivé integrační body v N -dimenzionálním prostoru se získávají systémem „každý s každým“ (full factorial design, přímý determinovaný pravděpodobnostní výpočet [20]), viz obr. 3.5 vlevo nahoře. Je-li počet dělení u jedné veličiny N_i , pak celkový počet bodů je $\prod_{i=1}^m N_i$. Pravděpodobnost náležející integrační buňce je získána jako

$$\Delta G_i(\theta_{ij}) = g_i(\theta_{ij}) \Delta \theta_i \quad (6)$$

kde $\Delta \theta_i$ označuje šířku integrační buňky.

3.1.2 Nerovnoměrné dělení domény náhodných veličin s konstantní pravděpodobností π_{ij} (PGrid)

Doména náhodné veličiny je pokryta nerovnoměrně na základě konstantní pravděpodobnosti výběru, viz obr. 3.5 vpravo nahoře. Transformace pravděpodobností do náhodné domény Θ v rovnici (5) je prováděna pro každou náhodnou veličinu $i = 1 \dots m$ s použitím inverzní distribuční funkce:

$$\theta_{ij} = G_i^{-1}(\pi_{ij}) \quad (7)$$

kde hodnoty π_{ij} jsou získány jako

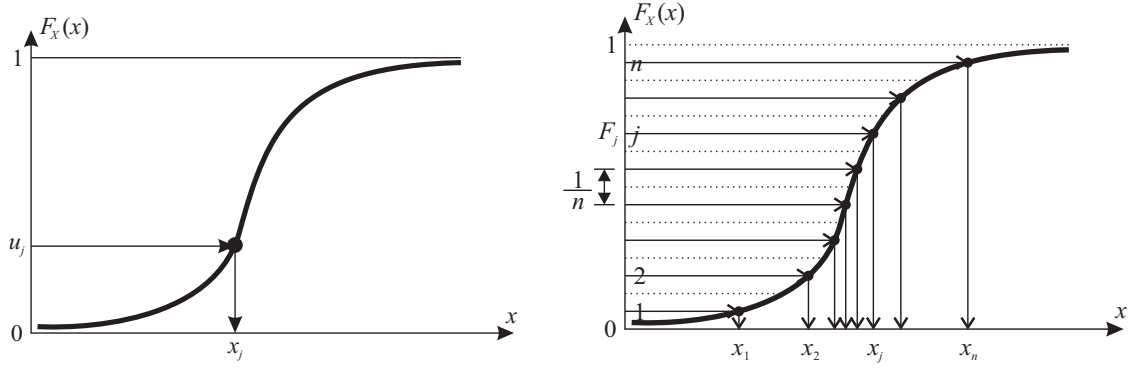
$$\pi_{ij} = \frac{2j - 1}{2n_i}. \quad (8)$$

Takto získaná integrační buňka náhodné veličiny má konstantní pravděpodobnost (váhu) pro všechny její integrační body:

$$\Delta G_i(\theta_{ij}) = \frac{1}{n_i} \quad (9)$$

a každá integrační buňka všech náhodných veličin má konstantní pravděpodobnost v m -rozměrném prostoru náhodných veličin

$$\Delta G(\theta) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{n_i}. \quad (10)$$



Obr. 3.1: Schéma znázorňující princip získání hodnot náhodné veličiny X inverzní transformací: metoda Monte Carlo (MCS, vlevo) a Latin Hypercube Sampling (vpravo).

Tento typ diskretizace je kombinací rastrového typu a konceptu Monte-Carlo s konstantní hodnotou pravděpodobnosti integrační buňky.

3.1.3 Klasická metoda Monte-Carlo (MCS)

Místo použití uspořádaných hodnot π_{ij} uvedených v rovnici (8) jsou pravděpodobnosti náhodně vybírány z intervalu $\pi_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$ a odpovídající hodnoty integračních bodů jsou vypočteny z inverzní distribuční funkce (7), viz obr. 3.1 vlevo. Pole Θ_i jsou jednorozměrná pole obsahující $n_i = n_{\text{sim}}$ hodnot pro každou náhodnou veličinu a výpočet je potom proveden pomocí jediného cyklu (sumace):

$$\mu_k(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n_{\text{sim}}} \underbrace{[q(\varepsilon; \theta_{1j}, \dots, \theta_{mj})]^k}_{Q^k} \cdot \frac{1}{n_{\text{sim}}} \quad (11)$$

3.1.4 Latin Hypercube Sampling (LHS)

Tato metoda, sofistikovanější verze metody Monte Carlo, využívá rovnoměrného pokrytí pravděpodobností distribuční funkce náhodné veličiny. Hodnoty integračních bodů metody LHS pokrývají rovnoměrněji jednotkovou hyperkrychli vzorkovacích pravděpodobností π_{ij} než vzorky klasické metody Monte-Carlo. V důsledku toho je rozptyl odhadů statistik jako je např. (11) nižší v porovnání s klasickou metodou MCS [11, 16, 17, 19, 29, 36, 43].

Podobně jako v případě MCS jsou data v jednorozměrném poli a integrace je provedena jediným cyklem jak je předepsáno v (11). Integrační body v (7) jsou

získány z pravděpodobností vypočítaných jako:

$$\pi_{ij} = \frac{2r_{ij} - 1}{2n_{\text{sim}}} \quad (12)$$

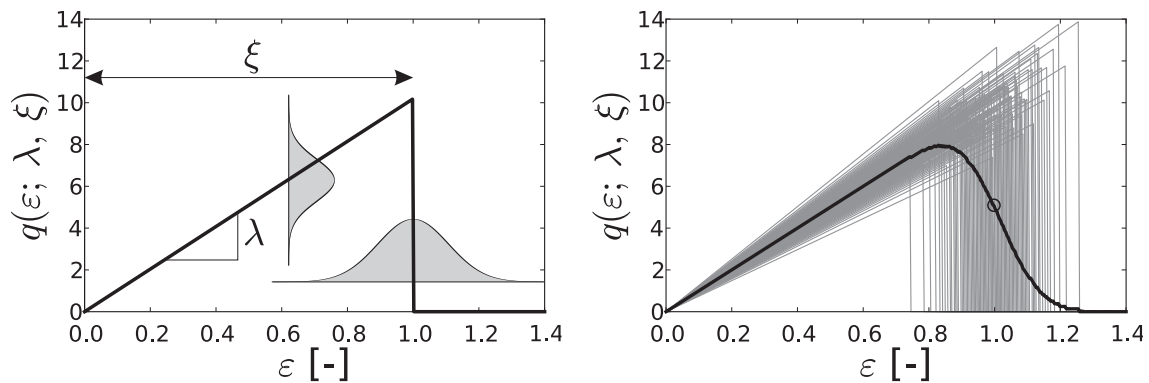
kde r_{ij} je matice o velikosti (m, n_{sim}) obsahující náhodné permutace pořadí $1, \dots, n_{\text{sim}}$ pro každou náhodnou veličinu. Tímto způsobem je vybrán střed každé vrstvy jako integrační bod, obr. 3.1 vpravo.

3.2 Implementace v jazyce Python – rovnoměrné dělení domény

V této části bude předveden způsob implementace jednoduché funkce odezvy taženého vlákna se dvěma $m = 2$ náhodnými parametry λ a ξ v programovacím jazyce Python [39]:

$$q(\varepsilon; \lambda, \xi) = \lambda \varepsilon \cdot H(\xi - \varepsilon) \cdot H(\varepsilon). \quad (13)$$

kde $H(x)$ je Heavisideova funkce, která vrací 0 pro $x < 0$ a 1 pro $x \geq 0$. Funkce (13) vrací hodnotu napětí pro kladné přetvoření ε lineárně pružného křehkého vlákna s tuhostí λ a mezním přetvořením ξ , viz obr. 3.2 vlevo. Záměrně byla zvolena funkce obsahující nespojitost, abychom mohli studovat schopnosti integračního algoritmu reprodukovat střední odezvu i u funkcí s nespojitostí. Na obrázku 3.2 vpravo jsou vykresleny střední hodnoty funkce dvou nezávislých náhodných veličin (14) pro daná přetvoření ε a vybrané realizace funkce (13).



Obr. 3.2: Vlevo: Odezva vlákna definovaná dvouparametrickou funkcí (lineárně pružné vlákno s definovaným mezním přetvořením). Vpravo: Střední odezva jednoho vlákna (černá silná čára) a vybrané simulace funkce odezvy jednoho vlákna (šedé křivky).

Zapojíme-li velké množství takovýchto vláken, která mají náhodné materiálové parametry λ a ξ , paralelně, pak odezvu dělenou počtem vláken můžeme vypočítat jako střední hodnotu odezvy vlákna uvnitř svazku:

$$\mu_q(\varepsilon) = \sum_{\Theta_\lambda} \sum_{\Theta_\xi} \underbrace{q(\varepsilon; \lambda, \xi)}_Q \underbrace{g_\lambda g_\xi \Delta\theta_\lambda \Delta\theta_\xi}_{\Delta G} \quad (14)$$

Nyní bude prezentován algoritmus implementace této funkce (14) v programovacím jazyce Python. Nejprve jsou nadefinovány hustoty pravděpodobnosti (normální rozdělení) parametrů λ a ξ (řádky 13 a 14) pomocí statistické funkce z balíčku `scipy.stats`. V dalším kroku je definiční obor obou parametrů Θ_λ a Θ_ξ rozdělen na $n_{\text{int}} = 10$ hodnot rovnoměrně pokrývajících definiční obor veličin.

```

from scipy.stats.distributions import norm # import normal distribution      1
import numpy as np                                                         2

# set the mean and standard deviation of the two random variables          3
m_la, std_la = 10.0, 1.0                                                  4
m_xi, std_xi = 1.0, 0.1                                                  5

# construct objects representing normal distributions                      6
pdistrib_la = norm(loc = m_la, scale = std_la)                           7
pdistrib_xi = norm(loc = m_xi, scale = std_xi)                           8

# access methods for the evaluation of probability density functions        9
g_la = pdistrib_la.pdf                                                    10
g_xi = pdistrib_xi.pdf                                                    11

n_int = 10 # number of discretization points                             12

# discretize the range (-1,1) symmetrically with n_int points             13
theta_arr = np.linspace(-(1.0 - 1.0 / n_int), 1.0 - 1.0 / n_int , n_int) 14

# cover each random variable symmetrically around the mean                15
theta_la = m_la + 4 * std_la * theta_arr                                 16
theta_xi = m_xi + 4 * std_xi * theta_arr                                 17

# get the size of the integration cells                                    18
d_la = (8 * std_la) / n_int                                              19
d_xi = (8 * std_xi) / n_int                                              20

```

Funkce odezvy je naimplementována podle rovnice (13):

```

def Heaviside( x ):                                                       28
    ''' Heaviside function '''                                           29
    return x >= 0.0                                                       30

```

<pre>def q_eq13(eps, la, xi):</pre>	32
<pre> ''' Response function of a single fiber '''</pre>	33
<pre> return la * eps * Heaviside(xi - eps)</pre>	34

Poznamenejme, že místo použití podmínky `if` a `else` pro zavedení nespojitosti (řádky 32-34) (tj. zjištění zda je či není vlákno přetržené), byla použita Heavisidova funkce (řádky 28-30). Parametry `la` a `xi` takto definované funkce mohou být skaláry nebo pole, protože tato implementace umožňuje “vectorizovaný” výpočet funkce. Použití `if` a `else` umožňuje zadávat pouze skalární parametry.

Přímá implementace rovnice (14) pomocí tří cyklů je zde uvedena pouze pro ilustraci: jeden cyklus pro získání hodnot pro daná přetvoření ε a dva cykly přes definiční obor parametrů Θ_λ a Θ_ξ .

<pre>def mu_q_eq14_loops(eps_arr):</pre>	35
<pre> # define an array of the same size as eps_arr initialized with zeros</pre>	36
<pre> mu_q_arr = np.zeros_like(eps_arr)</pre>	37
<pre> # loop over the control variable (strain)</pre>	38
<pre> for i, eps in enumerate(eps_arr):</pre>	39
<pre> mu_q = 0.0</pre>	40
<pre> # loops over the arrays of lambda and xi values</pre>	41
<pre> for la in theta_la:</pre>	42
<pre> for xi in theta_xi:</pre>	43
<pre> dG = g_la(la) * g_xi(xi) * d_la * d_xi</pre>	44
<pre> mu_q += q_eq13(eps, la, xi) * dG</pre>	45
<pre> mu_q_arr[i] = mu_q</pre>	46
<pre> return mu_q_arr</pre>	47
<pre></pre>	48
<pre># prepare the sequence of the control strains in a numpy array</pre>	49
<pre>eps_arr = np.linspace(0, 1.2, 80)</pre>	50
<pre>mu_q_arr = mu_q_eq14_loops(eps_arr)</pre>	51

Tato implementace je velmi pomalá v porovnání s jazykem C (asi 1000x). Efektivnější implementace v jazyce Python je dosaženo s využitím balíčku `numpy` a `scipy`, které poskytují efektivnější funkce pro práci s poli. Tato implementace je omezena velikostí fyzické paměti počítače. Paměť M potřebná pro výpočet je $M \propto \prod_{i=1}^m n_i$.

Zrychlení výpočtu vícerozměrného integrálu je docíleno vyhnutím se Pythonovskému cyklu `for` použitím základních operátorů pro práci s poli obsaženými v balíčku `numpy`. Výrazy v (14) Q a ΔG mohou být vypočítány jednotlivě pro všechny kombinace parametrů diskretizované náhodné domény $\Theta = \Theta_\lambda \times \Theta_\xi$ jako dvourozměrná pole a následně jsou použity operátory pro násobení a sumaci polí obsažené v `numpy`. Pole obsahující váhové faktory ΔG může být vypočítáno použitím metod balíčků `numpy` a `scipy` následovně:

<code>dG_la = g_la(theta_la) * d_la</code>	52
<code>dG_xi = g_xi(theta_xi) * d_xi</code>	53
<code>dG_grid = dG_la[:,np.newaxis] * dG_xi[np.newaxis,:]</code>	54

Na prvních dvou řádcích 52-53 jsou použity PDF funkce `g_la` a `g_xi` předpřipravené na řádcích 13-14. Pole hodnot `theta_la` a `theta_xi` jsou jednorozměrná a pokrývají rovnoměrně definiční obor náhodných veličin λ a ξ . Výsledkem volání funkce `g_la(theta_la)` je pole hodnot PDF pro každou hodnotu obsaženou v poli `theta_la`. Tento vektorizovaný výpočet je proveden pomocí kompilované numerické knihovny balíčku `numpy`. Smyčka (`for`) přes prvky pole není přímo definován v našem kódu, proto je často nesprávně označován jako kód bez cyklů (`loopless`).

Implicitní cykly jsou použity při výpočtu `dG_grid` na řádku 54 vracející dvourozměrné pole sdružených integračních vah: $\Delta G_{\lambda\xi}(\theta_\lambda, \theta_\xi) = \Delta G_\lambda(\theta_\lambda) \cdot \Delta G_\xi(\theta_\xi)$, $\forall \theta_\lambda \in \Theta_\lambda, \forall \theta_\xi \in \Theta_\xi$. Řádek 54 ukazuje použití indexových operátorů v `numpy` k součinu dvou polí, abychom se vyhnuli pomalému Pythonovskému cyklu. Princip použití implicitního cyklu:

- Jednorozměrnému poli `dG_la` a `dG_xi` náhodných veličin λ a ξ je přidána nová dimenze a vzniká dvourozměrné sloupcové pole (`dG_la[:,np.newaxis]`) a řádkové pole (`dG_xi[np.newaxis,:]`). Indexový operátor `:` zastupuje řez pole, tj. jsou použity všechny hodnoty této dimenze. Index `np.newaxis` zavádí novou dimenzi o délce 1. Ortogonální tvar polí `dG_la[:,np.newaxis]` a `dG_xi[np.newaxis,:]` je využit při operaci zvané „broadcasting“ (expanze polí), princip je znázorněn na obrázku 3.3: vynásobíme-li sloupcový vektor A o velikosti $(m, 1)$ řádkovým vektorem B o velikosti $(1, n)$, výsledná matice má velikost (m, n) . Neexistující sloupce matice A a neexistující řádky matice B jsou rozšířeny hodnotami z prvního sloupce resp. řádku, tj. $a_{(i,2\dots m)} = a_{(1,j)}$ a $b_{(2\dots n,j)} = b_{(i,1)}$.

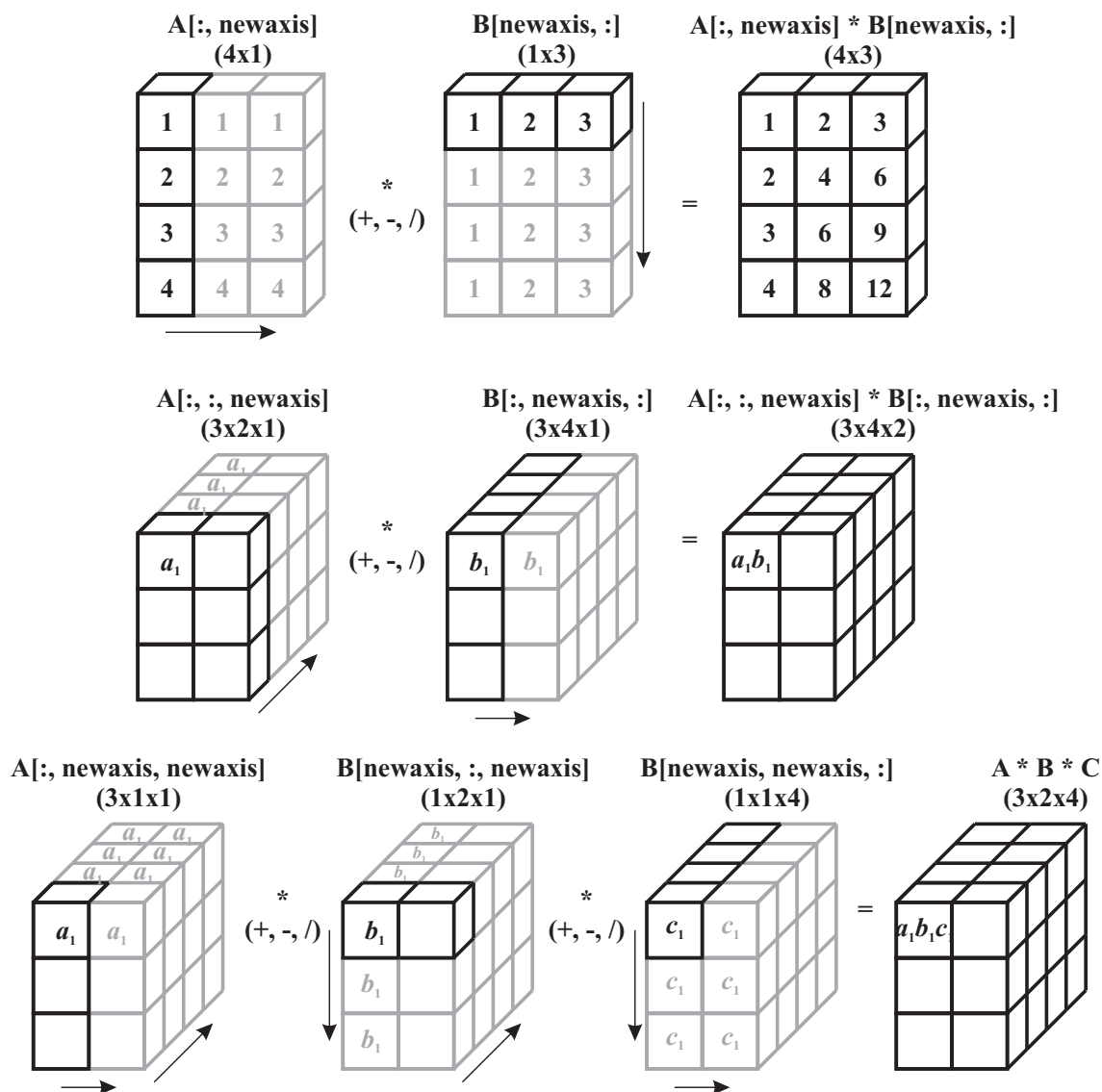
Popsaný způsob je použitelný pro více polí i vícerozměrná pole, např.:

- součin tří jednorozměrných polí (obr. 3.3 dole)


```
dG_grid = dG_t1[:,np.newaxis,np.newaxis] * dG_t2[np.newaxis,np.newaxis,:] * dG_t3[
  np.newaxis,:,np.newaxis]
```
- součin dvou dvourozměrných polí (obr. 3.3 uprostřed)


```
dG_grid = dG_t1[:,:,np.newaxis] * dG_t2[:,np.newaxis,:]
```

Toto významně zvyšuje rychlost výpočtu – vzhledem ke kódu napsaném pouze v programovacím jazyce Python – díky vektorizovanému algoritmu, který poskytuje dostatečný výkon během vývojové fáze aplikace.



Obr. 3.3: „Broadcasting“ – znázornění principu expanze polí na jejich součinu (analogicky ostatní operace (+, -, /)).

Máme-li pole pravděpodobnostních vah ΔG , můžeme přistoupit k implementaci funkce odezvy $q(\varepsilon; \lambda, \xi)$ definované v rovnici (13).

Analogicky k poli pravděpodobnostních vah ΔG jsou získány hodnoty pole Q hodnot funkce odezvy (opět s využitím broadcastingu). Výraz `q(eps, theta_la[:, np.newaxis], theta_xi[np.newaxis, :])` vrací hodnoty funkce odezvy pro všechny kombinace parametrů λ a ξ jako dvourozměrné pole. Celý výraz (14) může být vypočítán použitím následující metody

```
def mu_q_eq14(eps):
    ''' Summation / integration over the random domain '''
    q_grid = q_eq13(eps, theta_la[:, np.newaxis], theta_xi[np.newaxis, :])
```

# element by element product of two (n,n) arrays	58
q_dG_grid = q_grid * dG_grid	59
return np.sum(q_dG_grid)	60

Výsledkem volání `mu_q_eq14(1.0)` je střední odezva pro hodnotu přetvoření $\varepsilon = 1.0$, viz bod vyznačený na obrázku 3.2 vpravo. Abychom získali odezvu pro více hodnot přetvoření během jednoho volání funkce, funkce `mu_q_e14` může být vektorizována, aby mohla přijímat pole jako vstupní parametr:

<code>mu_q_eq14_vct = np.vectorize(mu_q_eq14)</code>	61
<code># eps_arr from line 50 reused here</code>	62
<code>mu_q_arr = mu_q_eq14_vct(eps_arr)</code>	63

Konečné vykreslení může být provedeno použitím knihovny `matplotlib` (rozhraní nazvané `pylab` se syntaxí podobnou Matlabu):

<code>import pylab as p</code>	64
<code>p.plot(eps_arr, mu_q_arr)</code>	65
<code>p.show()</code>	66

Výsledkem je graf střední odezvy zobrazený na obr. 3.2 silnou křivkou. Uvedený příklad popsal kroky potřebné během vývoje numerické aplikace. Uvedený skript je limitován konkrétní funkcí odezvy a předdefinovaným způsobem dělení domény náhodných veličin. Nyní bude představeno zobecnění pro různé typy diskretizace a vytvoření univerzální šablony.

3.3 Zobecnění implementace pro různé typy diskretizace

Abstraktní matematická formulace (rovnice 4) umožňuje použití libovolné funkce odezvy $q(\varepsilon; \theta)$ a pravděpodobnostních rozdělení $g_i(\theta_i)$. Je vhodné tuto flexibilitu matematického modelu zachovat i při jeho implementaci. Ukázkový skript v předchozí části využívá rovnoměrné diskretizace domény náhodných veličin (6). Abychom mohli snadno implementovat i další tři metody uvedené v části 3.1, vytvoříme obecnou šablonu, která je nezávislá na typu diskretizace. S funkcí může být v Pythonu zacházeno jako s proměnnou, čehož využívá následující kód, který definuje integrační proceduru bez určení konkrétní datové struktury integračních bodů:

<code>def get_mu_q(q, dG, *theta):</code>	67
<code>''' Return a method integrating the function q</code>	68
<code>with variables *theta associated with probabilities dG</code>	69

```

'''
def mu_q(eps):
    Q_dG = q(eps, *theta)
    Q_dG *= dG # in-place multiplication
    return np.sum(Q_dG)
return np.vectorize(mu_q)

```

Funkce `get_mu_q` tvoří obecnou metodu pro výpočet integrálu (14) a/nebo (11) pro libovolnou funkci odezvy `q` a seznam proměnných `dG` a `*theta`. Tento kód je nezávislý na typech vstupních veličin, a proto může být použit pro vytvoření integrační procedury všech čtyř typů diskretizace. V této podobě kód obsahuje algoritmy integrace, které jsou obecné pro všechny typy diskretizace, ale zůstává otevřený pro další typy diskretizace.

Funkce pro TGrid Hodnoty ΔG a Θ_i získané dříve jsou znovu použity při vytváření funkce `mu_q` a výpočtu střední odezvy:

```

##### 1) reuse the dG_grid and theta arrays (lines 22, 23 and 52-54)
##### 2) instantiate the template with the randomization
mu_q = get_mu_q(q_eq13, dG_grid, theta_la[:,np.newaxis], theta_xi[np.newaxis,:])
##### 3) estimate the mean response and plot the result
mu_q_arr = mu_q(eps_arr)

```

Funkce pro PGrid Algoritmus integrace založený na rastru s konstantní pravděpodobností výběru se skládá z následujících kroků: (1) Rovnoměrné rozdělení intervalu pravděpodobností $\langle 0, 1 \rangle$, výpočet hodnot náhodných veličin pomocí inverzní distribuční funkce (ppf) a výpočet počtu simulací $n_{\text{sim}} = \prod_{i=1}^m n_i$; (2) vytvoření metody pro výpočet střední odezvy a (3) výpočet hodnot pro daná přetvoření ε .

```

##### 1) generate the equidistant array of sampling probabilities
pi_arr = np.linspace(0.5 / n_int, 1. - 0.5 / n_int, n_int)
# use ppf (percent point function) returning inverse probabilities (lines 9, 10)
theta_la = pdistrib_la.ppf(pi_arr)
theta_xi = pdistrib_xi.ppf(pi_arr)
# get the total number of integration points (n_int equal for both variables)
n_sim = n_int ** 2 # (where 2 is the number of random variables)
##### 2) instantiate the above template with the randomization
mu_q = get_mu_q(q_eq13, 1.0 / n_sim, theta_la[:,np.newaxis], theta_xi[np.newaxis,:])
##### 3) estimate the mean response
mu_q_arr = mu_q(eps_arr)

```

V této implementaci je opět využito expanze polí („broadcasting“, řádek 89) a místo pole vah `dG_grid` je použita pouze konstantní hodnota $\Delta G = 1/n_{\text{sim}}$.

Metoda MCS Funkce `get_mu_q` může být také použita spolu s metodou Monte Carlo, která pokrývá doménu nerovnoměrně. Pro porovnání rastrových variant s variantami typu Monte Carlo je uvažován stejný počet vyhodnocení funkce, tedy počet simulací je $n_{\text{sim}} = \prod_{i=1}^m n_i$, kde n_i je počet integračních bodů i -té náhodné veličiny použité v rastrových typech diskretizace.

```
##### 1) generate n_sim random realizations using pdistrib objects (lines 9, 10) 92
theta_la_rvs = pdistrib_la.rvs(n_sim) 93
theta_xi_rvs = pdistrib_xi.rvs(n_sim) 94
##### 2) instantiate the integration template with the randomization 95
mu_q = get_mu_q(q_eq13, 1.0 / n_sim, theta_la_rvs, theta_xi_rvs) 96
##### 3) estimate the mean response 97
mu_q_arr = mu_q(eps_arr) 98
```

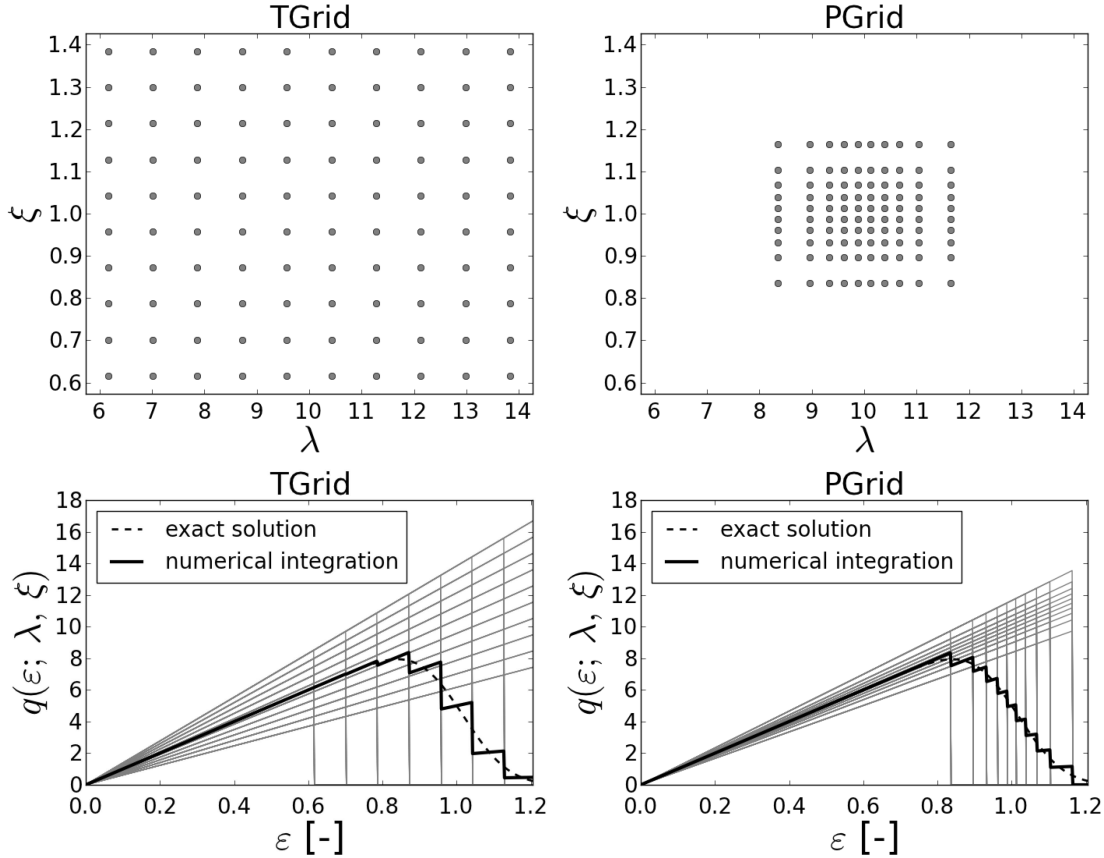
Hodnota ΔG je opět konstantní. Integrační body, vstupující do výpočtu, jsou uspořádány v jednorozměrném poli.

Metoda LHS Nejdříve je připraveno pole s n_{sim} (uspořádanými) hodnotami θ_i pomocí inverzní distribuční funkce (percent point function ppf). Pořadí hodnot v poli je změněno pomocí funkce `np.random.permutation`, abychom získali nezávislé vektory náhodných veličin (stačí provést pro $m - 1$ náhodných veličin).

```
##### 1) generate n_sim values of random nature (n_sim as above) 99
pi_arr = np.linspace(0.5 / n_sim, 1. - 0.5 / n_sim, n_sim) 100
# get the ppf values (percent point function) using pdistrib objects 101
# defined at lines 9, 10 102
theta_la_ppf = pdistrib_la.ppf(pi_arr) 103
theta_xi_ppf = pdistrib_xi.ppf(pi_arr) 104
# make random permutations of both arrays to diminish correlation 105
# (not necessary for one of the random variables) 106
theta_la = np.random.permutation(theta_la_ppf) 107
theta_xi = theta_xi_ppf 108
##### 2) instantiate the above template with the randomization 109
mu_q = get_mu_q(q_eq13, 1.0 / n_sim, theta_la, theta_xi) 110
##### 3) estimate the mean response 111
mu_q_arr = mu_q(eps_arr) 112
```

Obrázky 3.4 a 3.5 ukazují výsledky čtyř implementovaných algoritmů. Pro varianty s rovnoměrným rastrem (TGrid, PGrid) je použito $n_\lambda = n_\xi = 10$ integračních bodů. U variant typu Monte Carlo (MCS, LHS) je použit počet integračních bodů $n_{\text{sim}} = n^m = 10^2$.

Dalším krokem je vytvoření obecné implementace, která vytváří interaktivní objekt, který tyto operace provádí automaticky. Toho je dosaženo ve vyvinutém programovém balíku SPIRRID.

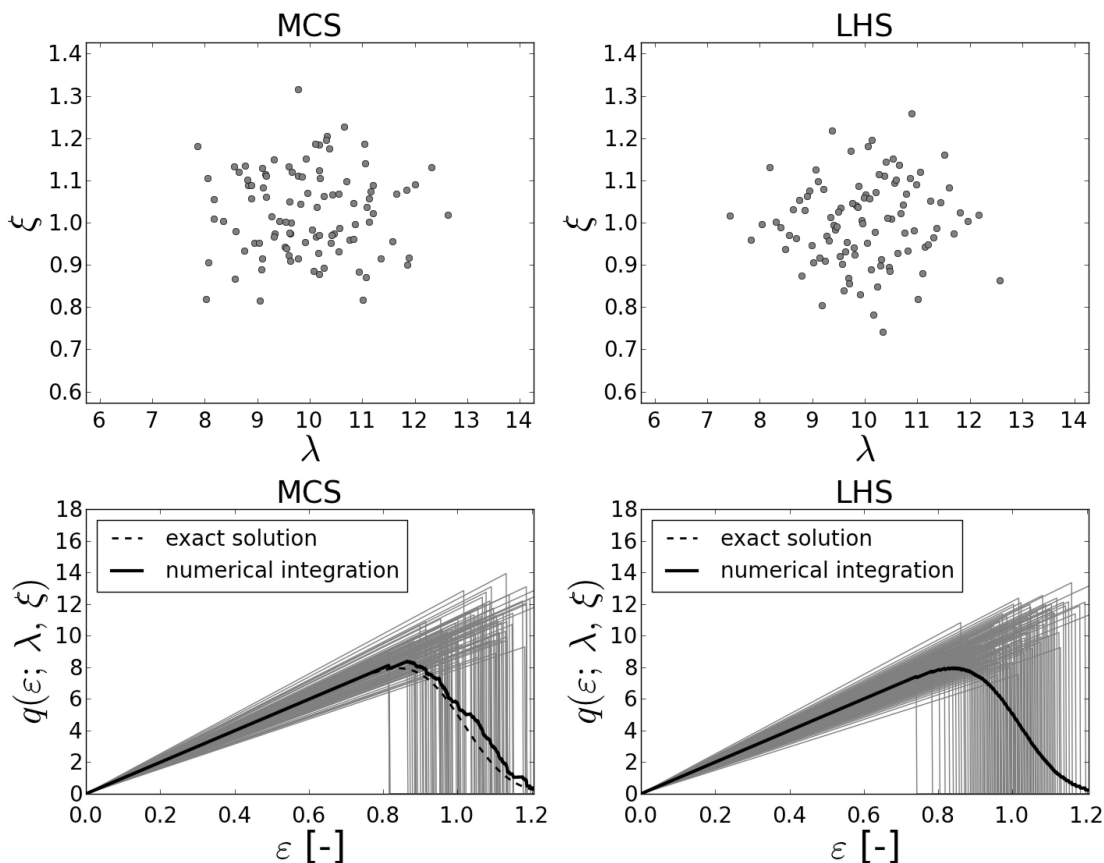


Obr. 3.4: Rastr pokrývající náhodnou doménu a vypočtená střední odezva pro dané integrační schéma dvoupametrické funkce odezvy (rastrové typy).

3.4 SPIRRID

Implementace uvedené výpočtové procedury byla rozšířena a zobecněna v balíčku pojmenovaném `spirrid`. Implementace zachovává abstraktní matematickou formulaci, která vede k vysoké flexibilitě. Hlavní rysy balíčku jsou shrnuty v následujících bodech:

- Jednoduchá integrace nové nebo již existující funkce odezvy $q(\varepsilon, \theta)$, která je definována jako funkce nebo jako instance třídy.
- Flexibilní a interaktivní změna parametrů. Proměnné ε mohou být zadány jako vícerozměrná pole. Náhodné parametry mohou být zadány pravděpodobnostním rozdělením obsaženým v balíčku `scipy.stats.distribution` nebo uživatelsky definovaným rozdělením `PDistrib`.
- Volba způsobu diskretizace domény náhodných veličin volbou jedné ze čtyř výše uvedených typů: TGrid, PGrid, MCS a LHS.
- Volba kódu integračního algoritmu je možná mezi `numpy` a kompilovaným C



Obr. 3.5: Pokrytí náhodné domény integračními body a vypočtená střední odezva pro dané integrační schéma (Monte Carlo metody).

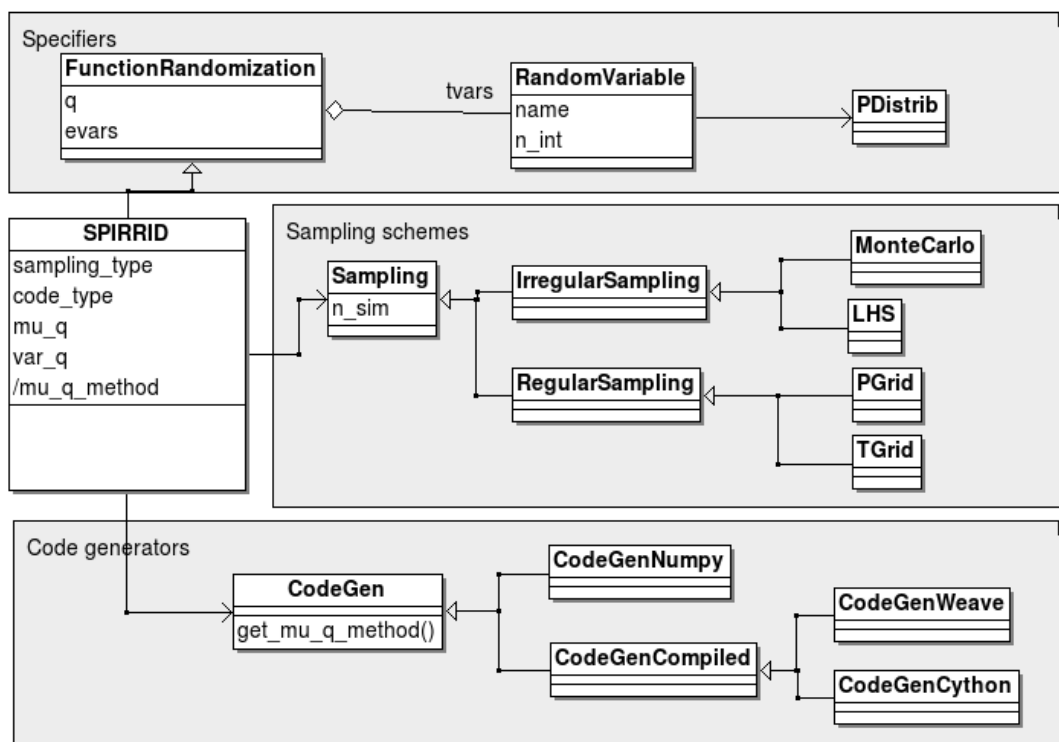
a je generován na požádání za běhu aplikace.

- Hodnoty rozptylu i kovariance mohou být vypočteny současně se střední hodnotou.
- Závislosti mezi vstupy a mezivýsledky jsou explicitně sledovány: pokud se změní vstupní parametry a parametry instance třídy `SPIRRID`, jsou závislé hodnoty přepočítány při dalším přístupu.

Struktura implementace je znázorněna pomocí UML diagramu tříd [8], obr. 3.6. Návrh tříd byl proveden s ohledem na flexibilitu pro tři základní úlohy:

Specifikace funkce odezvy `q` jako volatelný objekt; proměnné `evars` jako slovník (název parametru funkce `q`; hodnota/pole hodnot pro daný parametr); a slovník náhodných veličin `tvars` funkce `q` (název náhodné veličiny; deterministická hodnota/instance pravděpodobnostního rozdělení `PDistrib`).

Diskretizace náhodné domény je definovaná parametrem `sampling_type = ['TGrid', 'PGrid', 'MCS', 'LHS']` určujícím jednu z implementovaných metod. Generování



Obr. 3.6: UML diagram tříd obecné implementace algoritmu vícerozměrné numerické integrace.

náhodného výběru je prováděno ve třídě **Sampling**, která vrací pole Θ a odpovídající pole pravděpodobnostních vah ΔG .

Generování kódu je definováno parametrem `codegen_type = ['numpy', 'weave', 'cython']`. Kód je generován za běhu aplikace pro aktuální nastavení náhodných veličin a typ diskretizace.

Příslušné součásti balíčku jsou propojeny ve třídě **SPIRRID**. Následující kód ukazuje použití aplikace **SPIRRID**:

1. vytvoření instance třídy **SPIRRID** a nastavení parametrů výpočtu: nastavení funkce a pole přetvoření ε , definování náhodných veličin a výpočet integrálu je proveden pomocí **numpy**
2. smyčka **for** provádějící výpočet střední hodnoty pro jednotlivé typy diskretizace definované v seznamu ['TGrid', 'PGrid', 'MCS', 'LHS']
3. vykreslení výsledných průběhu střední hodnoty odezvy vlákna

<pre>from stats.spirrid import SPIRRID, RV</pre>	113
<pre>s= SPIRRID(q = q_eq13(),</pre>	114
<pre> eps_arr = np.linspace(0, 1.2, 80),</pre>	115

```

        tvars = dict(la = RV(distr = 'norm', loc = 10, scale = 1.0, n_int = 10), 116
                      xi = RV(distr = 'norm', loc = 1, scale = 0.1, n_int = 10)), 117
        codegen_type = 'numpy') 118
119
# plot results for all implemented sampling types 120
for sampling_type in ['TGrid', 'PGrid', 'MCS', 'LHS']: 121
    s.sampling_type = sampling_type 122
    p.plot(s.eps_arr, s.mu_q_arr, label = sampling_type) 123
124
# plot all results in a single figure 125
p.show() 126

```

3.5 Propojení jednotlivých částí balíčku SPIRRID

Jednotlivé části třídy `SPIRRID` jsou propojeny pomocí atributů obsažených v knihovně `Traits` [32], které rozšiřují vlastnosti běžných Pythonovských objektů:

Inicializace – nastavení výchozí hodnoty proměnné před jejím prvním použitím v programu

Ověření – typ proměnných je pomocí `traits` explicitně definován a při zadávání hodnot je ověřován.

Delegování – hodnota s atributy `traits` může být definována přímo v objektu nebo delegována z jiného.

Sledování změn – nastavení hodnoty může vyvolat událost, která vyvolá příslušnou operaci (např. při změně vstupu jsou přepočítány všechny hodnoty, ve kterých se tento vstup vyskytuje).

Vizualizace – uživatelské rozhraní umožňuje uživateli interaktivně měnit hodnoty a může být automaticky vytvořeno pomocí atributů definovaných v `traits`.

Např. třída `RV`, která je použita pro definování vlastností náhodných veličin: rozdělení, parametry a počet integračních bodů.

```

from enthought.traits.api import HasTraits, Str, DelegatesTo, Int \ 127
    cached_property 128
from stats.pdistrib import PDistrib 129
130
class RV(HasTraits): 131
    '''Class representing a random parameter of the response function. 132
    ''' 133
    # string specifying the type of the distribution: 'norm', 'uniform', ... 134
    distr_type = Str('norm') 135
    # parameters of the distribution 136
    loc = Float(0.0) 137

```

```

scale = Float(0.0)
shape = Float(1.0)

# number of integration/discretization points
n_int = Int(40)

# object representing the probabilistic distribution as a property of RV
# it is constructed only if the parameters of the distribution have changed.
distr = Property( depends_on = 'loc, scale, shape' )
@cached_property
def _get_distr(self):
    return PDistrib(type = self.distr_type,
                    loc = self.loc, scale = self.scale, shape = self.shape)

# Methods returning pdf, cdf and ppf are delegated to the 'distr' trait
pdf = DelegatesTo('distr')
cdf = DelegatesTo('distr')
ppf = DelegatesTo('distr')

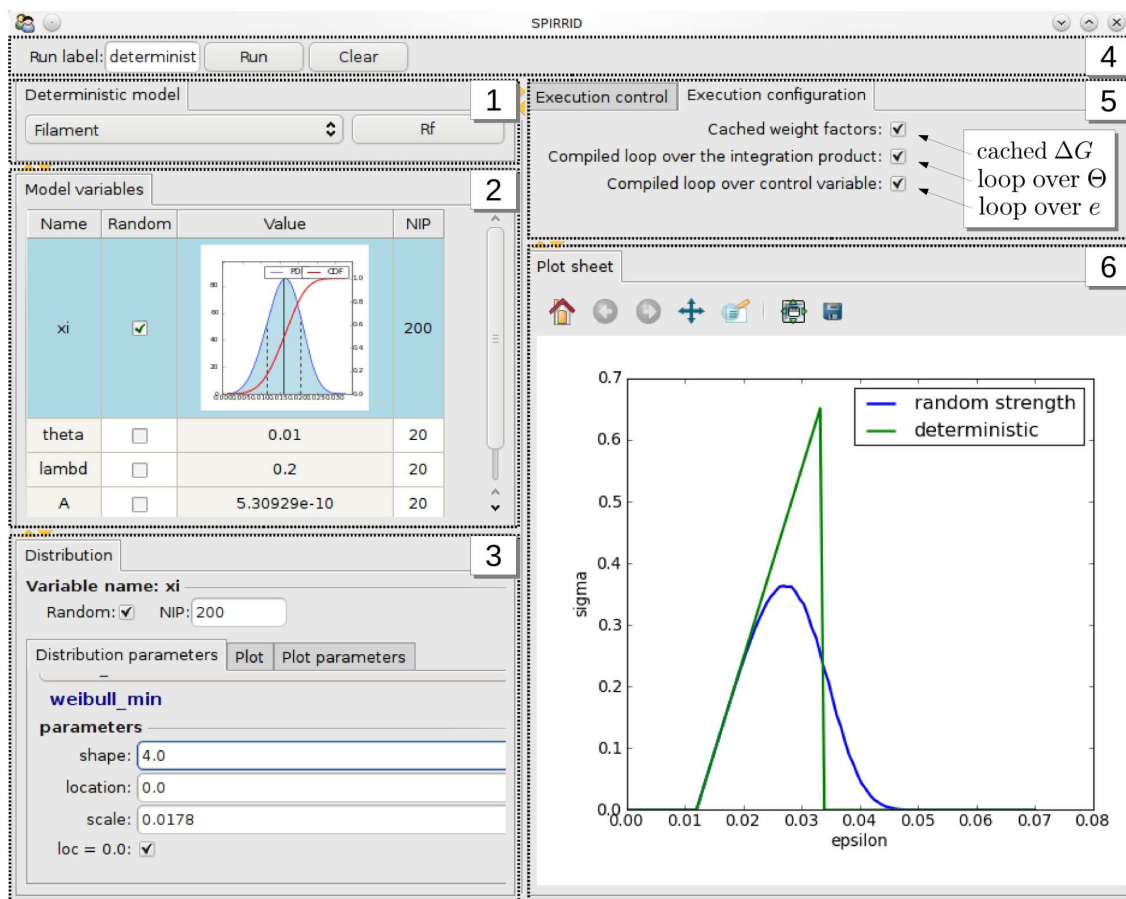
```

Třída `RV` ukazuje použití jednoho možného způsobu reakce na změny parametrů, specifikovaných v `depends_on='loc, scale, shape'`, použitím `@cached_property`. Aktualizace této proměnné typu `Property` je provedena se zpožděním, tj. při dalším přístupu k této proměnné `distr` (okamžitá aktualizace proměnné může být provedena použitím `@on_trait_change('loc, scale, shape')` nad definicí metody.).

Na obrázku 3.7 je jednoduché uživatelské rozhraní programu `SPIRRID` sestavené pomocí funkce `View` obsažené v balíčku `Enthought traits`. Toto rozhraní obsahuje všechny dříve popsané výpočtové části uspořádané do následujících záložek: (1) volba funkce odezvy a nastavení deterministických hodnot parametrů, (2) volba náhodných parametrů, (3) definování pravděpodobnostního rozdělení a jeho parametrů, (4) spuštění výpočtu, (5) nastavení výpočtu (typ diskretizace a jazyk implementace) a (6) vykreslení vypočtených středních křivek funkce (odezvy vlákna). Uživatelské rozhraní je konfigurovatelné – rozložení jednotlivých záložek si může uživatel upravit podle potřeby.

3.6 Testování aplikace SPIRRID

V této části bude porovnána efektivita různých konfigurací balíčku `spirrid`: (a) rychlost výpočtu pro jednotlivé typy diskretizace domény náhodných veličin, (b) rychlost konvergence jednotlivých typů diskretizace a (c) rychlost výpočtu v závislosti na programovacím jazyku, který byl použit pro implementaci pravděpodobnostního in-



Obr. 3.7: Uživatelské rozhraní instance třídy SPIRRID.

tegrálu. Tyto testy byly provedeny na dvoupametrické (a, b, c) a pětípametrické (a, c) funkci (odezva vlákná) obsahující nespojitost, která je definována Heavisideovou funkcí.

3.6.1 Dvoupametrická funkce odezvy

Testování bylo provedeno na dvoupametrické funkci (13), jejíž implementace byla popsána v ukázkovém skriptu. Oba parametry λ a ξ byly uvažovány náhodné normálně rozdělené veličiny, tab. 3.1. Tato funkce a rozdělení byla použita, protože je možné jednoduše získat přesné analytické řešení, které je použito při testování přesnosti jednotlivých typů diskretizace. Přesné řešení je:

$$\mu_q^{\text{exact}}(\varepsilon) = \frac{\mu_\lambda \varepsilon}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(\varepsilon - \mu_\xi)}{2\sigma_\xi} \right) \right) \quad (15)$$

kde $\operatorname{erf}(x)$ je chybová funkce definovaná jako $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Konvergence jednotlivých typů diskretizace byla studována v závislosti na počtu integračních

	μ	σ	CoV	pozn.
λ	10	1	0.1	tuhost vlákna
ξ	1	0.1	0.1	mezní přetvoření

Tab. 3.1: Střední hodnota, směrodatná odchylka a variační koeficient parametrů dvouparametrické funkce odezvy.

bodů a na čase výpočtu.

Byly uvažovány dva typy chyb – lokální a globální. Lokální chyba byla definována jako maximální relativní odchylka ze všech n_ε hodnot vypočtených pro všechna přetvoření ε :

$$e_{\max} = \frac{\max_i |\mu_q(\varepsilon_i) - \mu_q^{\text{exact}}(\varepsilon_i)|}{\max_i [\mu_q^{\text{exact}}(\varepsilon_i)]}, \text{ kde } i = 1 \dots n_\varepsilon. \quad (16)$$

Globální chyba je počítána jako relativní kvadratický průměr (rms – root mean square error) přes všechna přetvoření ε :

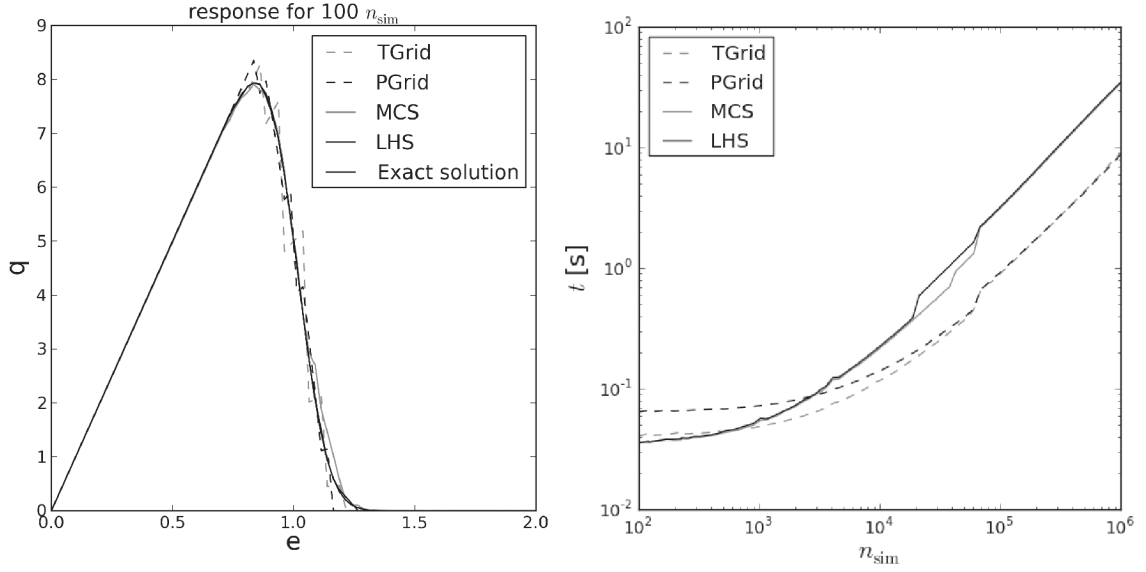
$$e_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n_\varepsilon} \sum_i (\mu_q(\varepsilon_i) - \mu_q^{\text{exact}}(\varepsilon_i))^2}}{\max_i [\mu_q^{\text{exact}}(\varepsilon_i)]}, \text{ kde } i = 1 \dots n_\varepsilon. \quad (17)$$

Na obrázku 3.8 vlevo jsou křivky odezvy pro jednotlivé typy diskretizace porovnány s křivkou přesného řešení při $n_{\text{sim}} = 10^2$. Pro vyšší počet simulací se výsledek velmi rychle blíží k přesnému řešení. Vpravo je doba výpočtu v závislosti na počtu simulací v logaritmickém grafu. Z grafu je vidět, že pro $n_{\text{sim}} > 10^5$ je nárůst času v logaritmickém grafu přibližně lineární.

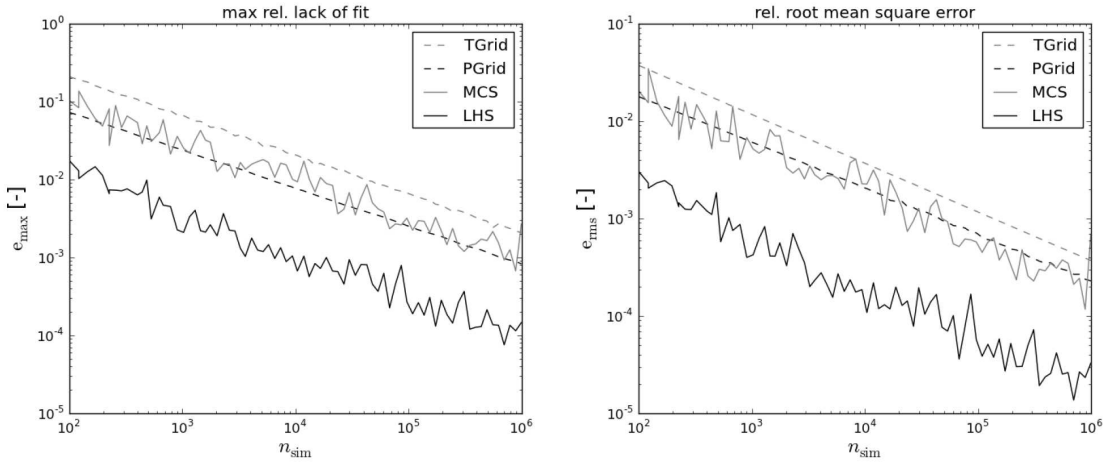
Obrázek 3.9 ukazuje závislost lokální a globální chyby numerické integrace na počtu provedených simulací pro jednotlivé typy diskretizace náhodné domény. V logaritmickém grafu je tato závislost lineární. Lokální a globální chyba v závislosti na čase je vyobrazena na obrázku 3.10.

Z obrázku 3.10 je zřejmé, že získání dostatečně přesného výsledku ($e_{\text{rms}} \leq 10^{-3}$) trvá méně než 1 s. V případě složitějších úloh s více náhodnými proměnnými může být tento čas již významný a jakékoli zrychlení je vhodné. V Pythonu je zrychlení výpočtu možno dosáhnout mnoha způsoby, zpravidla se jedná o přepsání inkriminované části kódu pomocí efektivnějšího kompilovaného jazyka (fortran, C). Přehled možností zrychlení kódu je uveden např. v [49].

V balíčku `spirrid` byly použity dvě možnosti zrychlení kódu: `cython` [5] a `weave` [1]:



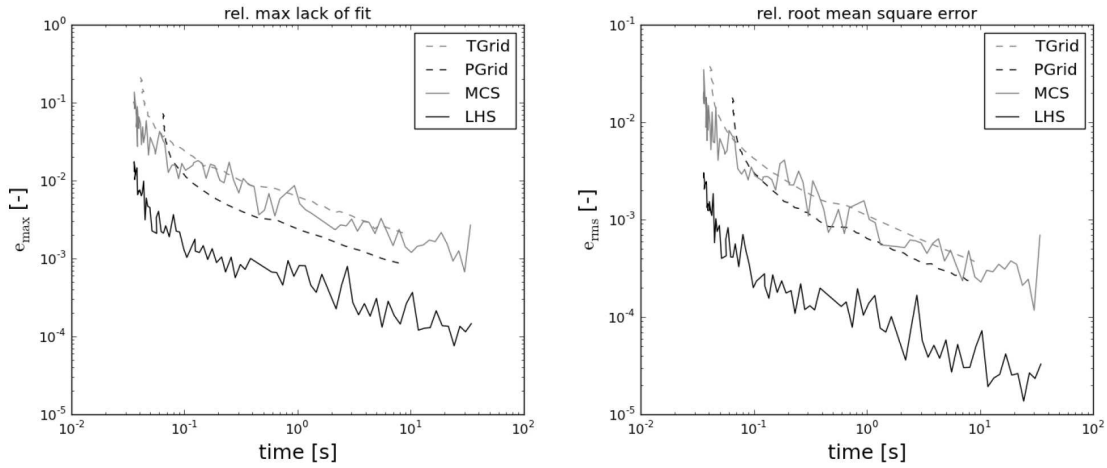
Obr. 3.8: Dvoupametrická funkce odezvy – střední odezva pro čtyři typy diskretizace při $n_{sim} = 10^2$ (vlevo). Rychlost výpočtu v závislosti na počtu simulací (vpravo). ($n_\varepsilon = 80$)



Obr. 3.9: Grafy konvergence k přesnému řešení, v závislosti na počtu simulací, lokální (16) a globální (17) chyby.

weave součást balíčku **scipy**, která umožňuje implementovat kód napsaný v jazyce C do Pythonovského kódu.

cython jazyk, syntaxí podobnou jazyku Python, který umožňuje volání funkcí jazyka C, deklaraci typů proměnných a parametrů (položek) třídy. Toto umožňuje (spolu s dalšími nastaveními) kompilátoru generovat velmi efektivní kód v C.



Obr. 3.10: Grafy konvergence k přesnému řešení, v závislosti na výpočtovém čase, lokální (16) a globální (17) chyby.

Pruhové grafy na obr. 3.11 zobrazují časy potřebné pro výpočet integrálu metodami LHS a PGrid pro případ dvouparametrické funkce (13). Obě varianty byly nastaveny tak, aby bylo dosaženo přibližně stejné chyby u obou variant $e_{\text{rms}} \leq 5 \cdot 10^{-5}$, která odpovídá $n_{\text{sim}} = 440^2$ pro LHS a $n_{\text{sim}} = 5000^2$ pro PGrid. Čas výpočtu byl měřen pro tři fáze výpočtu:

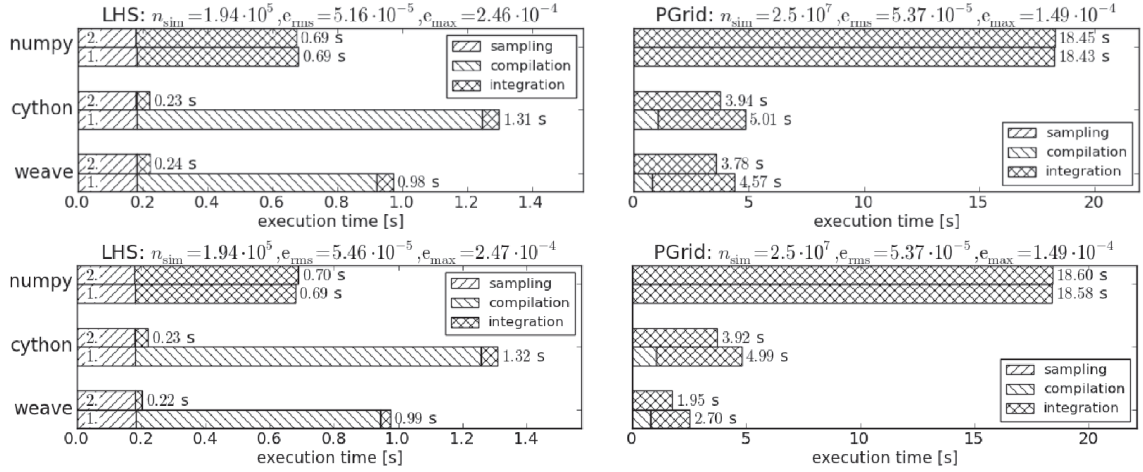
- **sampling** – příprava polí Θ a ΔG obsahující hodnoty náhodných veličin v integračních bodech,
- **compilation** – čas potřebný pro přípravu a kompilaci kódu metody `mu_q_method` a
- **integration** – čas výpočtu samotného pravděpodobnostního integrálu z připravených polí.

Každý výpočet byl spuštěn dvakrát, aby bylo možné odfiltrout čas potřebný pro sestavení a kompilaci generovaného kódu v programovacím jazyce C.

Příprava polí Θ pro LHS je pro všechny varianty kódu stejná, protože je prováděna stejným způsobem s použitím balíčku `numpy` a je přibližně 0.19 s.

U variant používajících kompilovaný kód je v prvním běhu výpočtu vidět čas potřebný pro sestavení kódu a jeho kompilaci. Tento čas je pro všechna nastavení přibližně konstantní: `cython` ~ 1 s a `weave` ~ 0.7 s. U LHS je tento čas poměrně významný vzhledem k celkovému času výpočtu. Pro větší a komplexnější úlohy s více náhodnými veličinami a integračními body se tento rozdíl snižuje.

Přibližně stejného výpočtového času bylo dosaženo pro variantu `weave` a `cython`. Tento výsledek není překvapivý, protože výsledkem obou variant je kompilovaný kód



Obr. 3.11: Porovnání výpočtového času pro LHS a PGrid potřebný v prvním a druhém běhu výpočtu integrálu dvouparametrické funkce odezvy pro varianty `numpy`, `cython` a `weave` ($n_\varepsilon = 80$). Dole: přidány argumenty kompilátoru `-NDEBUG -fwrapv -O3 -march=native -ffast-math`.

programovacího jazyka C. Mírného zrychlení bylo dosaženo u varianty `weave` přidáním následujících argumentů kompilátoru: `-NDEBUG -fwrapv -O3 -march=native -ffast-math`. Konkrétně bylo dosaženo zrychlení oproti `numpy` přibližně $12\times$ pro LHS a $5\text{--}9\times$ pro PGRID.

3.6.2 Pětiparametrická funkce odezvy

Pětiparametrická funkce odezvy:

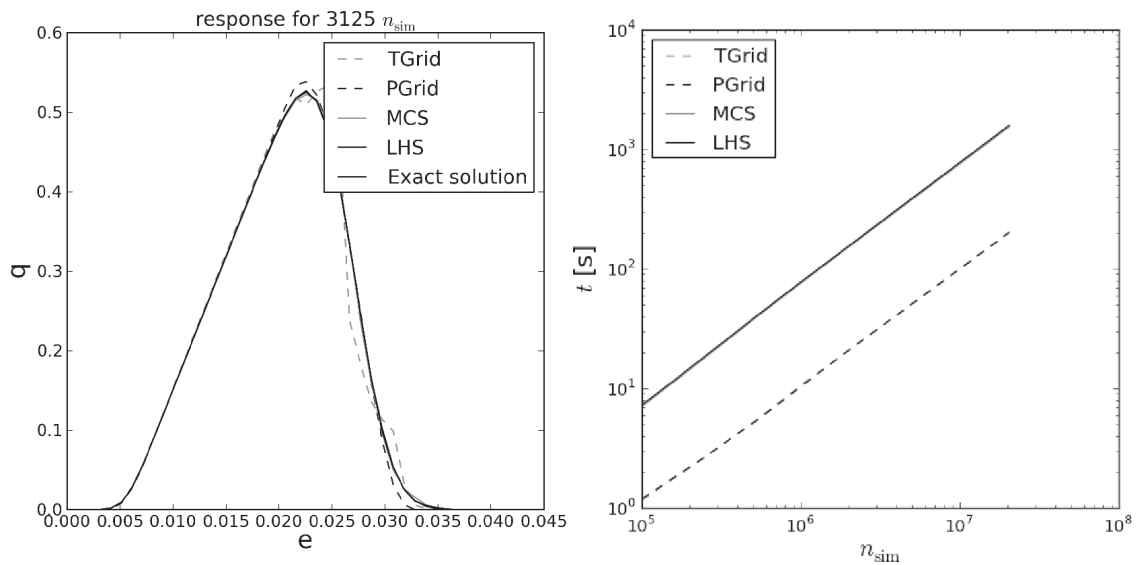
$$q(\varepsilon; \lambda, \xi, E, A, \theta) = EA \frac{\varepsilon - \theta(1 + \lambda)}{(1 + \theta)(1 + \lambda)} \cdot \underbrace{H(\xi - \varepsilon)}_{\text{přetržení vlákna}} \cdot \underbrace{H\left(\frac{\varepsilon - \theta(1 + \lambda)}{(1 + \theta)(1 + \lambda)}\right)}_{\text{aktivace vlákna}} \quad (18)$$

kde ξ je maximální přetvoření při porušení vlákna, E je modul pružnosti, A je průřezová plocha vlákna, θ je přetvoření, při kterém dojde k aktivaci vlákna a λ je koeficient poměrného prodloužení vlákna k jeho nominální délce. Podrobné informace této odezvy je v [10]. Všech pět parametrů $E, A, \theta, \lambda, \xi$ jsou uvažovány jako normálně rozdělené náhodné veličiny, tab. 3.2.

Pruhové grafy na obr. 3.13 zobrazují časy potřebné pro výpočet integrálu metodami LHS a PGrid pro případ funkce odezvy (18). Obě varianty byly nastaveny tak, aby bylo dosaženo přibližně stejné chyby u obou variant $e_{\text{rms}} \leq 2 \cdot 10^{-3}$, která odpovídá $n_{\text{sim}} = 8^5$ pro LHS a $n_{\text{sim}} = 30^5$ pro PGrid. Hodnoty zrychlení kompilovaného kódu vzhledem k `numpy` jsou $8.8\times$ pro LHS a $4.5\text{--}16.7\times$ pro PGrid.

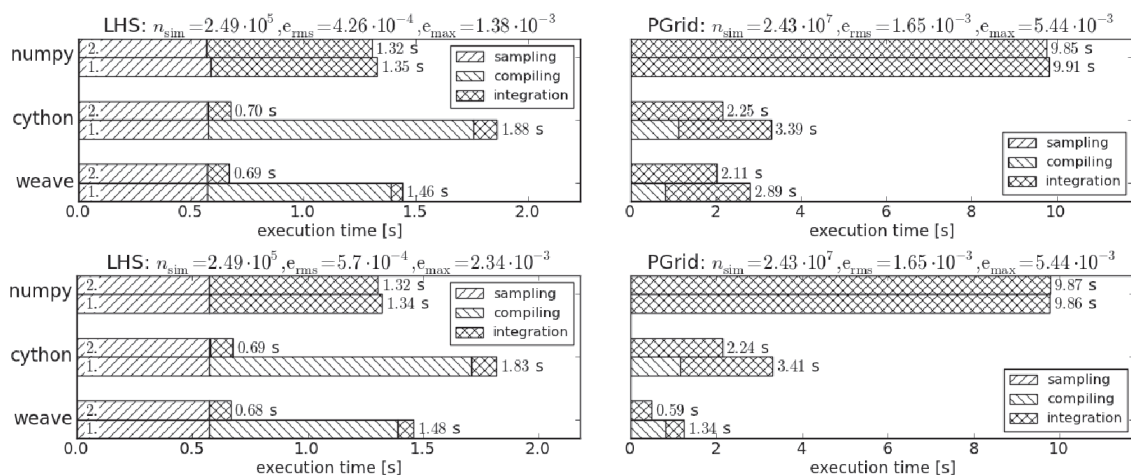
	μ	σ	CoV
E	$70 \cdot 10^9$	$15 \cdot 10^9$	0.214286
A	$5.3 \cdot 10^{-10}$	10^{-11}	0.018868
θ	0.005	0.001	0.2
ξ	0.019027	0.0022891	0.120308
λ	0.1	0.02	0.2

Tab. 3.2: Střední hodnota, směrodatná odchylka a variační koeficient parametrů pětiparametrické funkce odezvy.



Obr. 3.12: Pětiparametrická funkce odezvy – střední odezva pro čtyři typy diskretizace při $n_{sim} = 5^5$ (vlevo). Rychlost výpočtu v závislosti na počtu simulací (vpravo). ($n_\varepsilon = 40$)

Testovány byly také možnosti zrychlení kódu pomocí balíčku `numexpr`, který umožňuje optimalizuje `numpy` operace s poli a může být mnohokrát rychlejší než prosté `numpy`. V našem případě komplexní funkce s mnoha parametry nebylo dosaženo významného zrychlení. Použití pro takto komplexní úlohy je problematické a nezaručeno zrychlení výpočtu. Další možností vhodnou pro námi řešený problém, který obsahuje nespojitost a pole náhodných veličin mohou obsahovat poměrně velké množství nulových hodnot je použití maskovaných polí obsažených v balíčku `numpy.ma`. V našem případě čas přístupu do těchto polí převážil čas ušetřený při vynechání operací na zamaskovaných (nulových) hodnotách (integračních bodech),

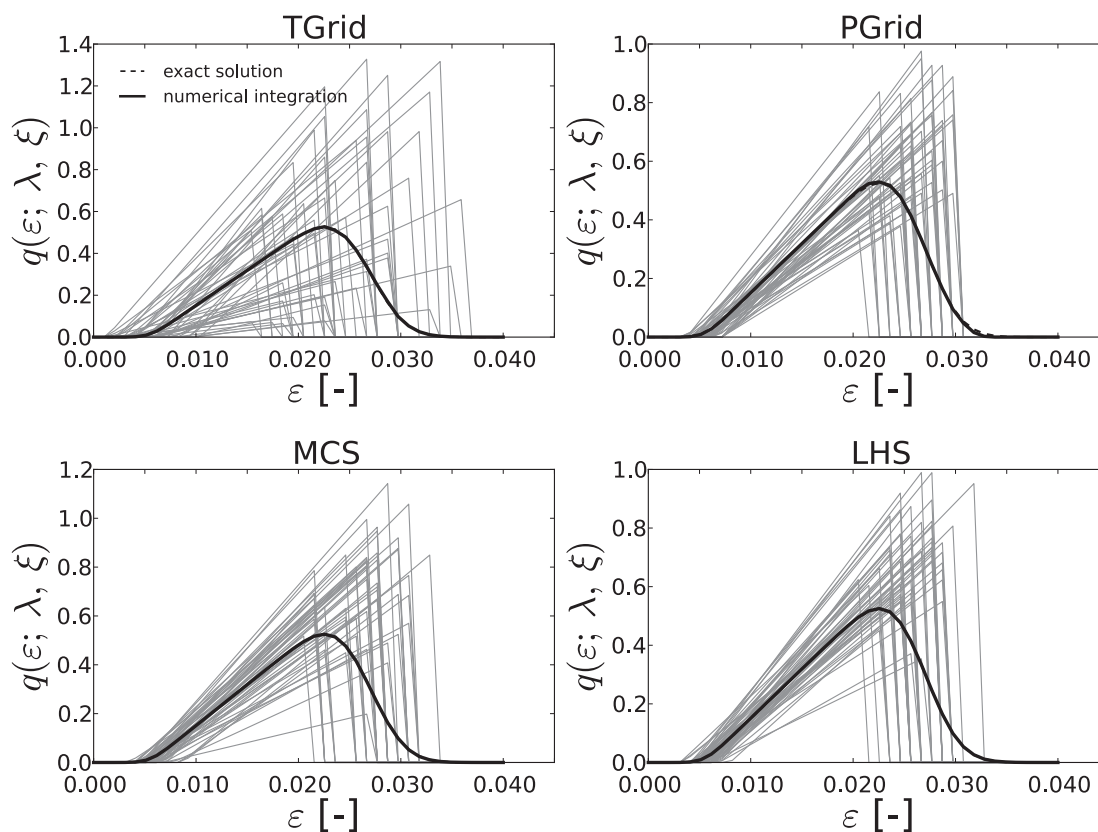


Obr. 3.13: Porovnání výpočtového času pro LHS a PGrid potřebný v prvním a druhém běhu výpočtu integrálu pětiparametrické funkce odezvy pro varianty `numpy`, `cython` a `weave` ($n_e = 40$). Dole: přidány argumenty kompilátoru `-NDEBUG -fwrapv -O3 -march=native -ffast-math`.

a proto ani tato alternativa není v tuto chvíli vhodná pro zvýšení efektivity výpočtu numerického integrálu.

V této kapitole byl popsán výpočet statistik náhodné veličiny, která je funkcí kontrolních veličin a libovolného počtu nezávislých náhodných vstupů a vytvoření univerzální šablony implementované v programovacím jazyce Python. Hlavním výsledkem je konfigurovatelný výpočtový program SPIRRID pro výpočet vícerozměrných integrálů, který umožňuje výpočet statistik obecné funkce s náhodnými vstupy. Tento program byl použit pro výpočet síly přenášené ocelovým drátkem přemostujícím trhlinu (funkce náhodných veličin) v numerického příkladu v kapitole 1.

Výsledky prezentované kapitoly jsou zaslány k posouzení a případné publikaci v impaktovaném časopise [53].



Obr. 3.14: Střední odezva (černá křivka) pro různé typy diskretizace domény náhodných veličin. Vybrané simulace (šedé křivky) funkce odezvy jednoho vlákna z $n_{sim} = 10^5$. Přesné řešení (čárkovaná černá křivka) získané pomocí numerických simulací metodou LHS. ($n_\varepsilon = 40$)

4 ZÁVĚR

Předložená práce řeší několik vybraných aspektů modelování moderních kompozitních konstrukcí. Společným jmenovatelem je práce s neurčitostmi a náhodnými veličinami. Jsou řešeny jak teoretické otázky, tak experiment a v neposlední řadě i počítačová implementace nových metod pomocí moderních softwarových nástrojů.

Kapitola 1 prezentuje dosažené výsledky při řešení úlohy určení počtu vláken přemosťujících rovinu trhliny v kompozitu vyztuženém krátkými vlákny. S využitím znalosti objemového podílu vláken a tvaru vláken a vzorku byl předveden postup výpočtu náhodného počtu vláken přemosťujících trhlinu pro dvě varianty: (i) středy vláken jsou rozmístěny po celé délce vzorku rovnoměrně (vlákna mohou přesahovat hranice vzorku) a (ii) středy vláken jsou rozmístěny rovnoměrně na upravených intervalech v závislosti na natočení vláken tak, aby vlákna nepřesahovala hranice vzorku. Odvozená rozdělení jsou důležitá pro správné stanovení náhodné síly přenášené jedním vláknem a také síly přenášené všemi vlákny přemosťujícími trhlinu v náhodně vyztuženém kompozitu. Získané analytické vztahy byly využity v numerickém příkladu, který ukazuje odhad střední odezvy a rozptylu trhliny přemostěné vlákny a vliv variability náhodného počtu vláken na celkovou odezvu. Možné rozvíjení tématu lze spatřovat v řešení následujících problémů:

1. zavedení nových okrajových podmínek, které lépe vystihují skutečné rozmístění vláken v reálných kompozitech (např. shluky, výrobní vlivy – natočení ve směru toku směsi, zrání kompozitu)
2. použití dalších funkcí odezvy vláken pro různé typy drátků/vláken (drátky tvarované, deformované, apod.)
3. vytvoření komplexní úlohy zahrnující více interagujících jevů najednou

V kapitole 2 byly získány statistiky (střední hodnoty a směrodatné odchylky) a histogramy náhodných veličin potřebných pro stanovení odhadu střední odezvy vytahování (pullout) vlákna z matrice. Pro automatizaci vyhodnocování experimentálních dat vznikl softwarový nástroj s uživatelským rozhraním YMBMicro, který byl vytvořen během pobytu uchazeče na RWTH Aachen. Výsledky získané pomocí této aplikace jsou připraveny pro použití s programem SPIRRID, který je popsán v kapitole 3 pro získání odhadu střední odezvy daného vlákna při vytahování z cementové matrice. Práce poskytuje následující náměty k další práci:

1. grafické porovnání snímků z elektronového mikroskopu s daty (obr. A.3)
2. identifikace spojitých hustot pravděpodobnosti pro aproximaci získaných his-

togramů

3. interpolace průběhu vláken funkcí vyššího řádu (nyní je použita lineární interpolace mezi jednotlivými řezy)
4. generování virtuálního modelu svazku vláken na základě získaných statistik
5. porovnání predikované střední odezvy s výsledky experimentů na svazcích skleněných vláken zalitých do cementové matrice pro ověření možností tohoto přístupu predikovat odezvu svazku

V kapitole 3 byl popsán výpočet statistik náhodné veličiny, která je funkcí nezávislých náhodných veličin (např. funkce odezvy vlákna/svazku). Byla představena nová metoda a tato byla spolu s dalšími postupy porovnána co do výkonnosti, přesnosti a účinnosti. Způsob implementace studované funkce náhodných veličin v programovacím jazyce Python byl předveden na jednoduchém modelu dvouparametrické funkce odezvy. Univerzální implementace pro výpočet statistik funkcí s více náhodnými veličinami vznikla ve spolupráci s RWTH Aachen a nese název SPIRRID. Tento balíček obsahuje implementaci v jazyce Python s využitím balíčku `numpy` a také implementaci v jazyce C. Díky balíčku `Enthought ETS` a dalších Pythonovských knihoven vznikla flexibilní, konfigurovatelná a dostatečně výkonná aplikace pro výpočet vícerozměrných integrálů, která je snadno doplnitelná o grafické uživatelské rozhraní. Další náměty k pokračování tématu:

1. přidání nových metod diskretizace domény náhodných veličin
2. optimalizace dalších výpočtově náročných částí kódu pomocí programovacího jazyka C

Moduly `YMBMicro` a `SPIRRID` je možné jednoduše propojit a získat tak komplexní aplikaci pro odhad střední odezvy svazku skleněných vláken.

Zdrojové kódy obou aplikací jsou dostupné ke stažení z online repozitáře na adrese <https://github.com/simvisage>:

1. SPIRRID – repozitář `spirrid`,
2. YMBMicro – repozitář `simvisage` – `quaducum/quaducum/micro/ymb_micro`.

LITERATURA

- [1] Weave: tools for inlining C/C++ within Python code. <http://www.scipy.org/Weave>, 2011. URL <http://www.scipy.org/Weave>.
- [2] SPIRRID: Tool for statistics estimation of multi-variate random functions. <http://github.com/simvisage/src/spirrid>, 2011. URL <http://github.com/simvisage/src/spirrid>.
- [3] David Ascher and Paul F Dubois. Numerical python. *Computers in Physics*, 10(3):262–267, 2001. doi:[10.2307/2007860](https://doi.org/10.2307/2007860).
- [4] Stephanie J. Barnett, Jean-Francois Lataste, Tony Parry, Steve G. Millard, and Marios N. Soutsos. Assessment of fibre orientation in ultra high performance fibre reinforced concrete and its effect on flexural strength. *Materials and Structures*, 43(7):1009–1023, October 2009. ISSN 1359-5997. doi:[10.1617/s11527-009-9562-3](https://doi.org/10.1617/s11527-009-9562-3).
- [5] Stefan Behnel, Robert Bradshaw, Craig Citro, Lisandro Dalcin, Dag Sverre Seljebotn, and Kurt Smith. Cython: The best of both worlds. *Computing in Science & Engineering*, 13(2):31–39, April 2011. ISSN 1521-9615. doi:[10.1109/MCSE.2010.118](https://doi.org/10.1109/MCSE.2010.118). WOS:000288053300004.
- [6] J. R. Blum, D. L. Hanson, and J. I. Rosenblatt. On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Probability Theory and Related Fields*, 1(4):389–393, 1963. ISSN 0044-3719. doi:[10.1007/BF00533414](https://doi.org/10.1007/BF00533414).
- [7] J. E. Bolander and S. Saito. Discrete modeling of short-fiber reinforcement in cementitious composites. *Advanced Cement Based Materials*, 6(3-4):76–86, 1997. ISSN 1065-7355. doi:[16/S1065-7355\(97\)90014-6](https://doi.org/10.1016/S1065-7355(97)90014-6).
- [8] Grady Booch, James Rumbaugh, and Ivar Jacobson. *The Unified Modeling Language User Guide*. Addison-Wesley Professional, 1st edition, September 1998. ISBN 0201571684.
- [9] PH Borchers. Python: a language for computational physics. *Computer physics communications*, 177(1-2):199–201, July 2007. ISSN 0010-4655. doi:[10.1016/j.cpc.2007.02.019](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2007.02.019).

- [10] R. Chudoba, M. Vořechovský, and M. Konrad. Stochastic modeling of multi-filament yarns I: Random properties within the cross-section and size effect. *International Journal of Solids and Structures (Elsevier)*, 43(3-4):413–434, 2006. ISSN 0020-7683. doi:[10.1016/j.ijsolstr.2005.06.063](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.063).
- [11] W.J. Conover. On a better method for selecting input variables. unpublished Los Alamos National Laboratories manuscript, reproduced as Appendix A of “Latin Hypercube Sampling and the Propagation of Uncertainty in Analyses of Complex Systems” by J.C. Helton and F.J. Davis, Sandia National Laboratories report SAND2001-0417, printed November 2002., 1975.
- [12] David Dupont and Lucie Vandewalle. Distribution of steel fibres in rectangular sections. *Cement and Concrete Composites*, 27(3):391–398, 2005. ISSN 0958-9465. doi:[10.1016/j.cemconcomp.2004.03.005](https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2004.03.005).
- [13] Inc Enthought. *Enthought Scientific Computing Solution*. 2001. URL <http://www.enthought.com/>.
- [14] J. H. Halton. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numerische Mathematik*, 2(1):84–90, 1960. ISSN 0029-599X. doi:[10.1007/BF01386213](https://doi.org/10.1007/BF01386213). 10.1007/BF01386213.
- [15] J. Hegger and S. Voss. Investigations on the bearing behaviour and application potential of textile reinforced concrete. *Engineering Structures*, 30(7):2050–2056, 2008. ISSN 0141-0296. doi:[10.1016/j.engstruct.2008.01.006](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.01.006).
- [16] J. C. Helton and F. J. Davis. Latin Hypercube Sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. Technical Report SAND2001-0417, Sandia National Laboratories Albuquerque, New Mexico and Livermore, California, 2002.
- [17] D. E. Huntington and C. S. Lyrantzis. Improvements to and limitations of Latin Hypercube Sampling. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(4):245–253, 1998.
- [18] Sobol I.M. Quasi-Monte carlo methods. *Progress in Nuclear Energy*, 24(1–3): 55–61, 1990. ISSN 0149-1970. doi:[10.1016/0149-1970\(90\)90022-W](https://doi.org/10.1016/0149-1970(90)90022-W).

- [19] R. C. Iman and W. J. Conover. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models with an application to risk assessment. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, A9(17):1749–1842, 1980.
- [20] P. Janas, M. Krejsa, and V. Krejsa. Současné možnosti přímého determinovaného pravděpodobnostního výpočtu při posuzování spolehlivosti konstrukcí. pages 181–192, 2006. ISBN 80-248-1248-7.
- [21] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson, et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL <http://www.scipy.org/>.
- [22] Petr Kabele. New developments in analytical modeling of mechanical behavior of ECC. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 1(3):253–264, 2003.
- [23] B. Kang, I. Focke, W. Brameshuber, and W. Benning. Quantitative räumliche auswertung der mikrostruktur eines in beton eingebetteten multifilamentgarns. *4th Colloquium on Textile Reinforced Structures*, pages 247–260, 2009.
- [24] M. Konrad. *Effect of multifilament yarn crack bridging on uniaxial behavior of textile reinforced concrete*. PhD thesis, RWTH Aachen, 2008.
- [25] C Leung and V Li. Effect of fiber inclination on crack bridging stress in brittle fiber reinforced brittle matrix composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6):1333–1362, August 1992. ISSN 00225096. doi:[10.1016/0022-5096\(92\)90018-W](https://doi.org/10.1016/0022-5096(92)90018-W).
- [26] Victor C. Li, Youjiang Wang, and Stanley Backer. A micromechanical model of tension-softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(5):607–625, 1991. ISSN 0022-5096. doi:[10.1016/0022-5096\(91\)90043-N](https://doi.org/10.1016/0022-5096(91)90043-N).
- [27] Z. Lin, T. Kanda, and V. C. Li. On interface property characterization and performance of fiber-reinforced cementitious composites. *Journal of Concrete Science and Engineering*, 1:173–184, 1999. ISSN 1295-2826.
- [28] Bouzeroura Mansour. Model of behavior at pulling of the reinforced concrete of waved fibers. *Bulletin of Applied Mechanics*, 6(21), 2010. ISSN 1801-1217.
- [29] M. D. McKay, W. J. Conover, and R. J. Beckman. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21:239–245, 1979.

- [30] Douglas C. Montgomery. *Design and Analysis of Experiments*. Wiley, 8 edition, April 2012. ISBN 1118146921.
- [31] William J. Morokoff and Russel E. Caflisch. Quasi-Monte carlo integration. *Journal of Computational Physics*, 122(2):218–230, December 1995. ISSN 0021-9991. doi:[10.1006/jcph.1995.1209](https://doi.org/10.1006/jcph.1995.1209).
- [32] D. C. Morrill and J. M. Swisher. Traits 3 user manual. http://enthought.github.com/traits/traits_user_manual/front.html, 2011. URL http://enthought.github.com/traits/traits_user_manual/front.html.
- [33] H. Niederreiter. Quasi-Monte carlo methods. In *Encyclopedia of Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, Ltd, 2010. ISBN 9780470061602. doi:[10.1002/9780470061602.eqf13019/abstract](https://doi.org/10.1002/9780470061602.eqf13019/abstract).
- [34] JK Nilsen, X Cai, B Hoyland, and HP Langtangen. Simplifying the parallelization of scientific codes by a function-centric approach in Python. *Computational Science & Discovery*, 3:799–814, November 2007. ISSN 0010-4655. doi:[10.1088/1749-4699/3/1/015003](https://doi.org/10.1088/1749-4699/3/1/015003).
- [35] Travis Oliphant et al. *NumPy: Open source scientific package for scientific computing with Python*. 2006. URL <http://numpy.scipy.org/>.
- [36] A. Olsson, G. Sandberg, and O. Dahlblom. On Latin Hypercube Sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety, Elsevier Science Ltd.*, 25(1): 47–68, January 2003.
- [37] A. Rényi. On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 11(1-2):97–102, March 1960. ISSN 0001-5954. doi:[10.1007/BF02020627](https://doi.org/10.1007/BF02020627).
- [38] P. Robins, S. Austin, and P. Jones. Pull-out behaviour of hooked steel fibres. *Materials and Structures*, 35(7):434–442, August 2002. ISSN 1359-5997. doi:[10.1007/BF02483148](https://doi.org/10.1007/BF02483148).
- [39] Guido van Rossum et al. *The Python Programming Language*. 1991. URL <http://python.org/>.
- [40] I Sobol. On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7(4):86–112, 1967. ISSN 00415553. doi:[10.1016/0041-5553\(67\)90144-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90144-9).

- [41] Patrick Stähli, Rocco Custer, and Jan G. M. Mier. On flow properties, fibre distribution, fibre orientation and flexural behaviour of FRC. *Materials and Structures*, 41(1):189–196, 2007. ISSN 1359-5997. doi:[10.1617/s11527-007-9229-x](https://doi.org/10.1617/s11527-007-9229-x).
- [42] H. Stang, Z. Li, and S. P. Shah. Pullout problem: Stress versus fracture mechanical approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(10):2136–2150, 1990. doi:[10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1990\)116:10\(2136\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:10(2136)).
- [43] Michael Stein. Large sample properties of simulations using Latin Hypercube Sampling. *Technometrics*, 29(2):143–151, 1987. ISSN 0040-1706.
- [44] P. Stroeven. Morphometry of fibre reinforced cementitious materials. *Materials and Structures*, 11(1):31–38, January 1978. ISSN 0025-5432. doi:[10.1007/BF02478701](https://doi.org/10.1007/BF02478701).
- [45] P. Stroeven and J. Hu. Gradient structures in cementitious materials. *Cement and Concrete Composites*, 29(4):313–323, April 2007. ISSN 0958-9465. doi:[10.1016/j.cemconcomp.2006.10.002](https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2006.10.002).
- [46] Piet STROEVEN. Stereological principles of spatial modeling applied to steel Fiber-Reinforced concrete in tension. *ACI materials journal*, 106(3):213–222, 2009. ISSN 0889-325X. URL <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=21546536>.
- [47] M. Vořechovský and R. Chudoba. Stochastic modeling of multi-filament yarns: II. Random properties over the length and size effect. *International Journal of Solids and Structures (Elsevier)*, 43(3-4):435–458, 2006. ISSN 0020-7683. doi:[10.1016/j.ijsolstr.2005.06.062](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.062).
- [48] M. Vořechovský and D. Novák. Correlation control in small sample Monte Carlo type simulations I: A Simulated Annealing approach. *Probabilistic Engineering Mechanics (Elsevier)*, 24(3):452–462, 2009. ISSN 0266-8920. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.probengmech.2009.01.004>.
- [49] Ilmar M Wilbers, Hans Petter Langtangen, and Asmund Odegard. Using Cython to speed up numerical Python programs. *Proceedings of MekIT*, 9: 495–512, 2009.

- [50] Kun Zhou and Jianzhong Lin. Three dimensional fiber orientation distribution in two dimensional flows. *Fibers and Polymers*, 9(1):39–47, 2008. ISSN 1229-9197. doi:[10.1007/s12221-008-0007-3](https://doi.org/10.1007/s12221-008-0007-3).

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

$\mathbf{1}(x)$	indikátorová funkce
$\Delta G(\theta)$	váhové faktory
ℓ	délka vlákna
ℓ_e	kotevní délka vlákna
ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z	průmět délky vlákna do příslušné souřadné osy
δ	poloha řezné roviny vzhledem k těžišti vzorku
ξ	mezní přetvoření
λ	parametr poissonova rozdělení; tuhost vlákna
μ_k	k -tý statistický moment
$\rho_{X,Y}$	Spearmanův korelační koeficient
φ_c	úhel natočení vlákna protínajícího rovinu od její normály
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	úhel natočení vlákna od souřadných os
τ	třecí síla na jednotku délky
τ_{fr}	třecí napětí na jednotkovou plochu
θ	úhel natočení vlákna; přetvoření při aktivaci vlákna
θ_i	náhodná veličina
$\boldsymbol{\theta}$	náhodný vektor
Θ	integrační doména
A	průřezová plocha
A_c	průřezová plocha vzorku
A_f	průřezová plocha vlákna
$\text{Bi}(n, p)$	binomické rozdělení

c	kvalita kontaktu s matricí
c_{lim}	limitní kvalita kontaktu s matricí
$\text{CoV}(\cdot)$	variační koeficient
d	průměr vlákna
$d\theta$	šířka integrační buňky
$D[\cdot] = \sigma^2$	rozptyl
$e_{\text{max}}, e_{\text{rms}}$	lokální a globální relativní chyba přesného a numerického řešení
E	modul pružnosti
$E[\cdot] = \mu$	střední hodnota
$\text{erf}(\cdot)$	chybová funkce
f	koeficient vlivu natočení vlákna
$f_X(x)$	hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X
$F_X(x)$	distribuční funkce náhodné veličiny X
F^{-1}	inverzní distribuční funkce
g	hustota pravděpodobnosti
G	distribuční funkce
G^{-1}	inverzní distribuční funkce
$H(\cdot)$	Heavisidova funkce
k	náhodný počet vláken přemostujících trhlinu
$L = L_x, L_y, L_z$	délka hrany vzorku ve směru souřadných os
m	počet náhodných veličin
n	počet vláken uvnitř vzorku; počet integračních bodů náhodné veličiny
n_{sim}	počet simulací

p	pravděpodobnost průniku vlákna s rovinou
P_1	síla přenášená jedním vláknem přemostujícím trhlinu
P_k	síla přenášená k vlákny přemostujícími trhlinu
r	poloměr vlákna
$Q = q(\cdot)$	náhodná veličina definovaná jako funkce
$\text{Std}(\cdot)$	směrodatná odchylka
v_f	objemový podíl vláken
V_f	objem vlákna
V_t	objem vzorku
x, y, z	poloha středu vlákna
w	šířka trhliny
cython	jazyk, používající syntaxi podobnou jazyku Python, který umožňuje volání funkcí jazyka C, deklaraci typů proměnných a parametrů (položek) třídy. Toto umožňuje, spolu s dalšími nastaveními, kompilátoru generovat velmi efektivní kód v C.
ECC	Engineered Cementitious Composite, inženýrské cementové kompozity
Enthought Python Distribution (EPD)	komplexní soubor nástrojů (Pythonovské knihovny) pro analýzu a vizualizaci dat.
Enthought Tool Suite (ETS)	soubor Pythonovských knihoven obsažený v EPD dostupný jako open-source. Umožňuje vývoj multiplatformních interaktivních aplikací.
FRC	Fibre Reinforced Concrete, vlákny vyztužený beton
LHS	simulační metoda Latin Hypercube Sampling
Matplotlib	knihovna pro kreslení 2D grafů. Syntaxe podobná Matlabu.

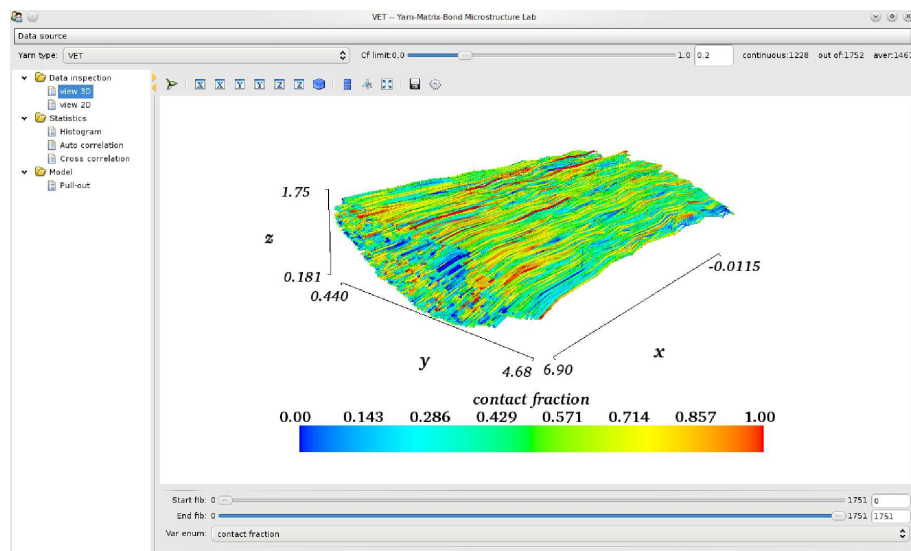
NumPy	základní balíček pro vědecké výpočty v Pythonu, který obsahuje nástroje pro vytváření vícerozměrných polí a rychlé operace s nimi.
PDF	Probability Density Function, hustota pravděpodobnosti
Python	interpretovaný programovací jazyk
SciPy	soubor matematických algoritmů a funkcí postavený na balíčku NumPy.
weave	funkce balíčku <code>scipy</code> , která umožňuje zahrnout kód napsaný v jazyce C do Pythonovského kódu.

SEZNAM PŘÍLOH

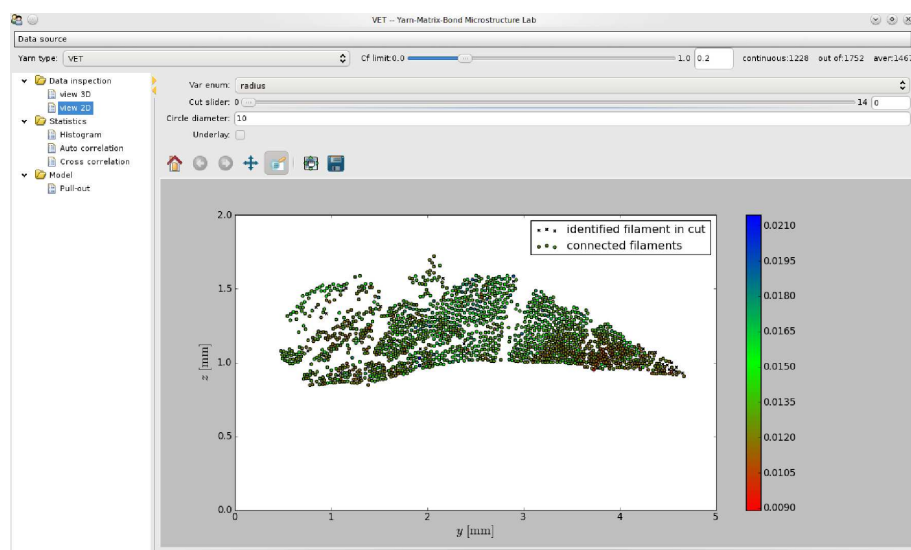
A	YMBMicro	85
A.1	Charakteristiky skleněných vláken	89
A.1.1	Vlákno MAG	89
A.1.2	Vlákno VET 1	91
A.1.3	Vlákno VET 2	93
A.1.4	Vlákno VET 3	95

A YMBMICRO

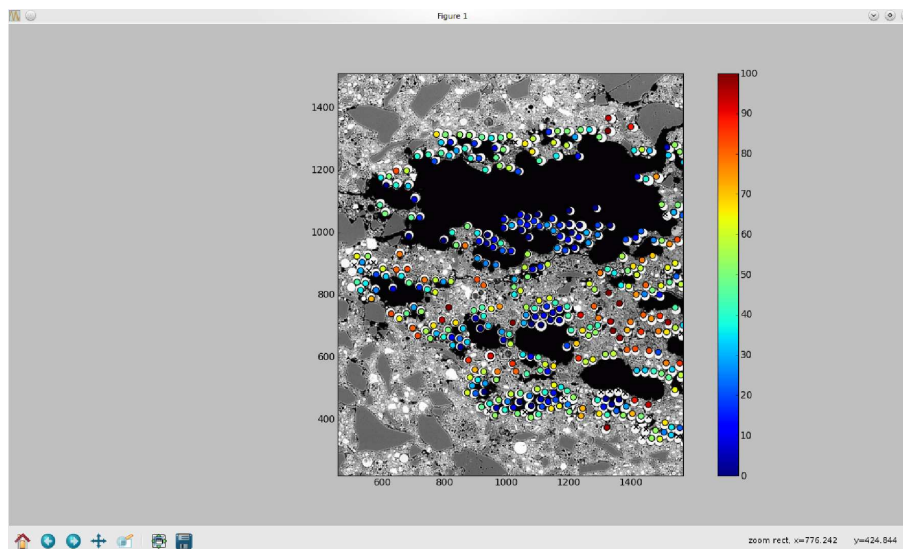
Na následujících obrázcích jsou okna grafického uživatelského rozhraní programu YMBMicro, který umožňuje analýzu experimentálních dat svazků skleněných vláken. Uvedené obrázky obsahují výsledky svazků označených VET.



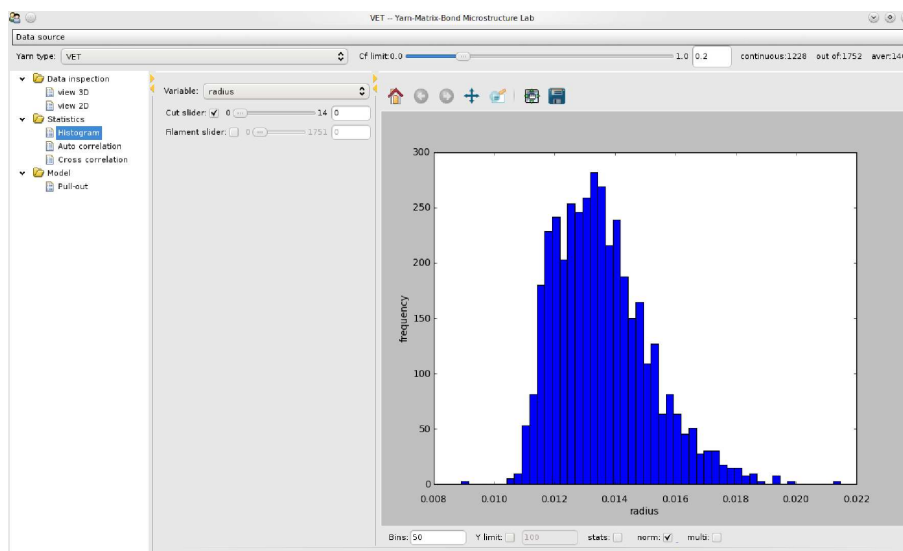
Obr. A.1: Okno pro zobrazení rekonstruovaného 3D modelu vlákna. Barevná škála umožňuje zobrazení hodnot zjištěných parametrů v řezech provedených po délce vlákna. Posuvníkem lze měnit množství zobrazovaných vláken.



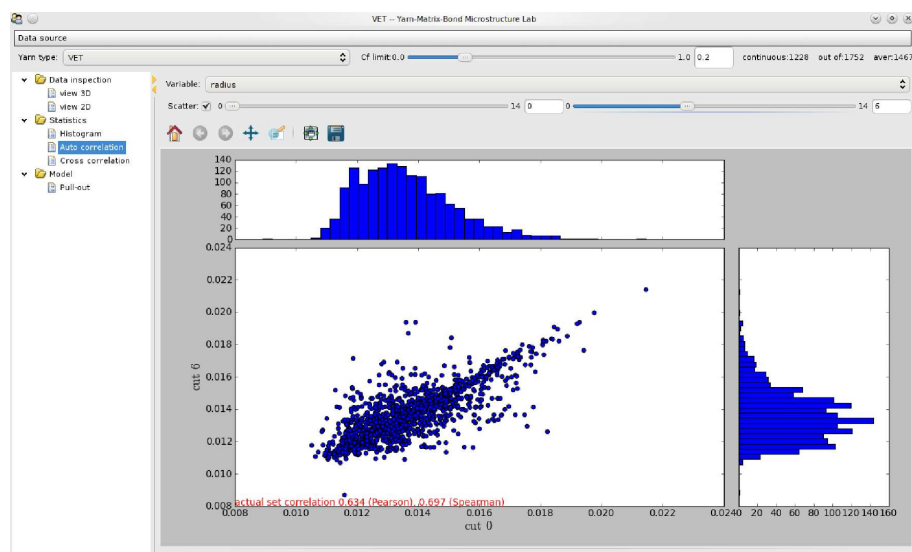
Obr. A.2: Zobrazení hodnot parametrů ve vybraném řezu/segmentu. Na obrázku je krajní řez svazku a barevná škála zobrazuje poloměr vlákna.



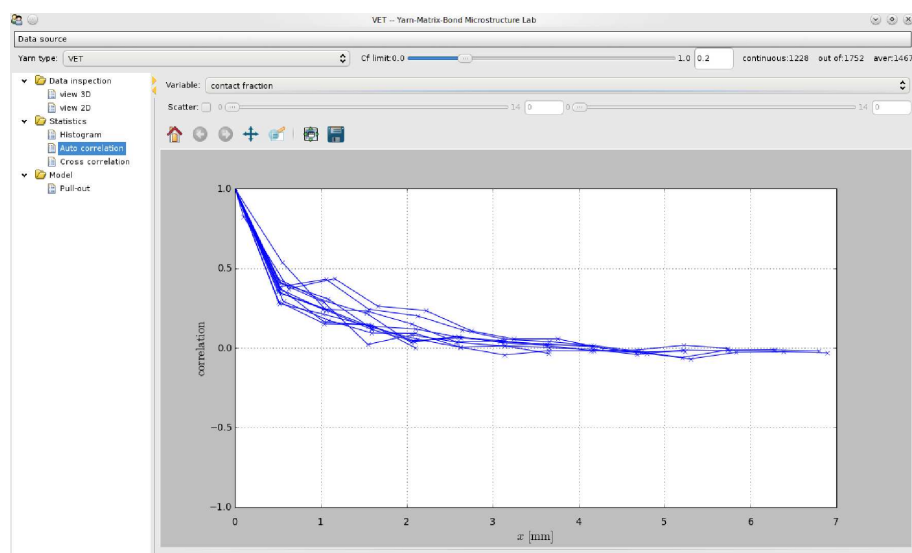
Obr. A.3: Možný způsob kontroly správnosti identifikované polohy a určených parametrů – porovnání dat se snímkem z elektronového mikroskopu. Barevná škála zobrazuje míru kontaktu s matricí.



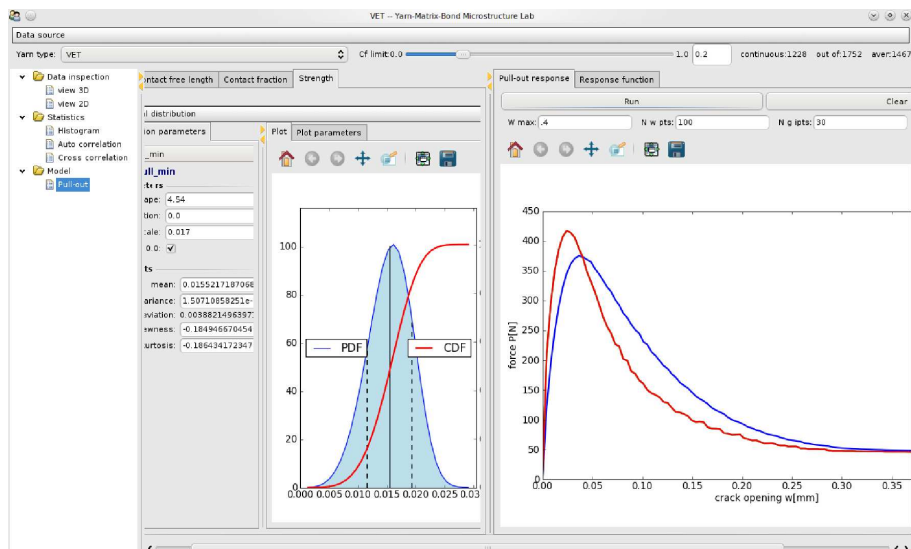
Obr. A.4: Statistické vyhodnocení parametrů vlákna – histogram, střední hodnota a směrodatná odchylka. Statistiku lze vyhodnocovat v řezech/segmentech, podél vlákna a ze všech dat svazku. Na obrázku je histogram poloměru vláken v krajním řezu svazku.



Obr. A.5: Bodový graf rozptylu s hodnotou korelace mezi jednotlivými řezy. Posuvníky umožňují volbu analyzovaných řezů.



Obr. A.6: Graf autokorelační funkce podél délky x svazku vláken. Na obrázku je průběh funkce pro míru kontaktu s maticí.



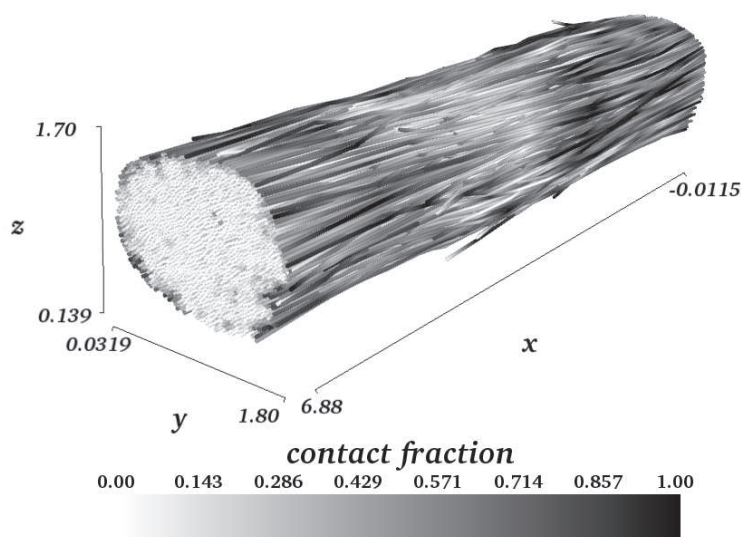
Obr. A.7: Modul (instance třídy SPIRRID) pro odhad střední odezvy vlákna z histogramů získaných z dat a definovaných pravděpodobnostních rozdělení (PDF). Střední část okna umožňuje volbu PDF a nastavení jeho parametrů a počtu integračních bodů. Výsledná střední odezva svazku je vykreslena v pravé části okna pro dvě různé hodnoty cf_limit .

A.1 Charakteristiky skleněných vláken

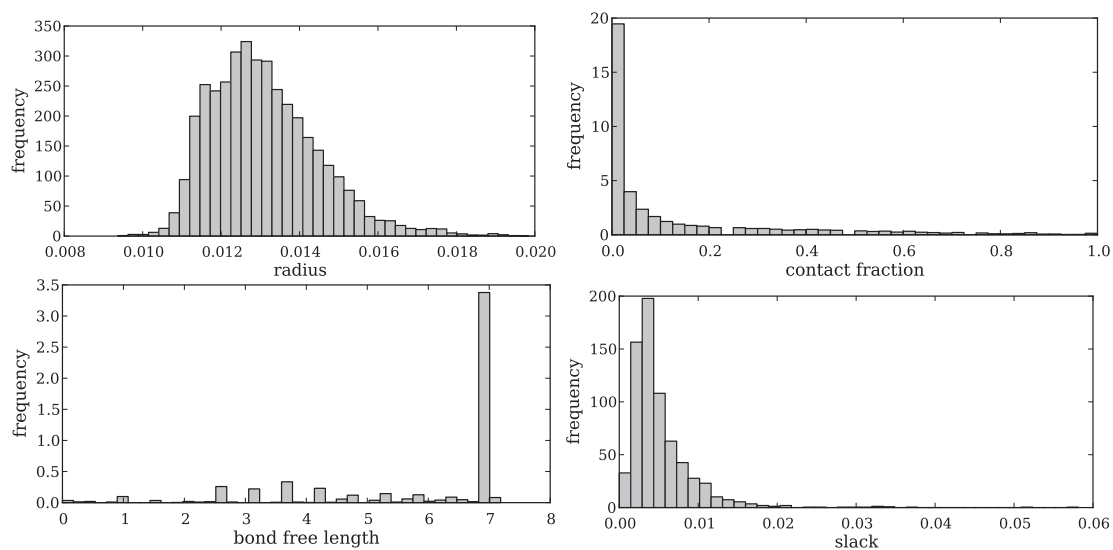
Souhrn grafických výstupů z programu YMBMicro (kapitola 2) analyzovaných typů skleněných vláken. Hodnoty pro relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací a volnou délku jsou uvažovány pro hodnotu $c_{lim} = 0.5$.

A.1.1 Vláknó MAG

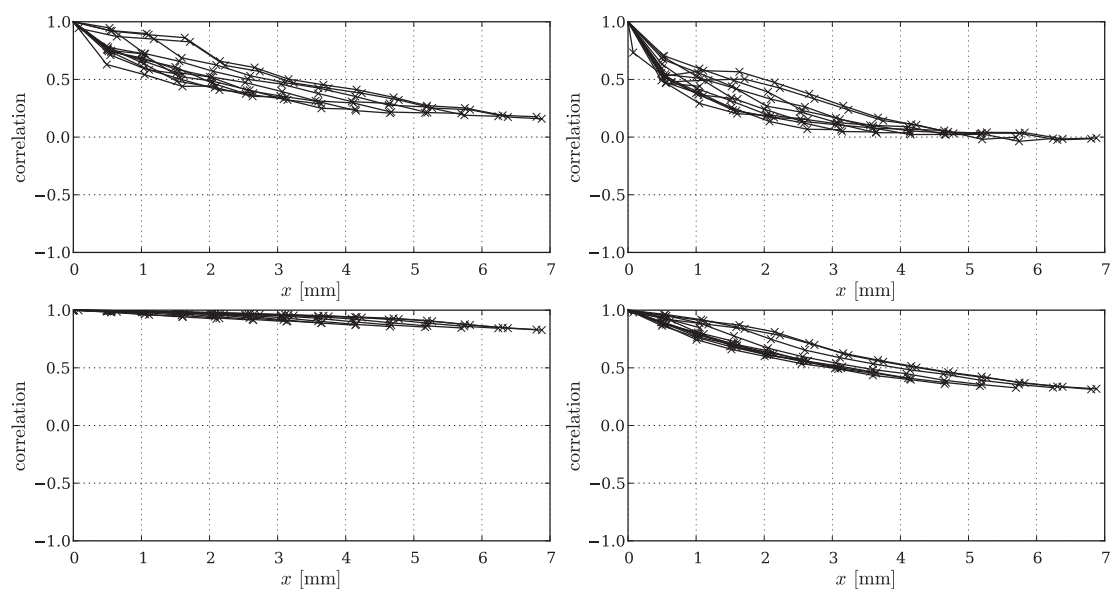
Celkem bylo naidentifikováno 2244 segmentů vláken. Z tohoto počtu je 1326 průběžných. Počet průběžných vláken, které je možné seskládat ze všech segmentů, je 1743.



Obr. A.8: 3D model svazku vláken. Kruhový svazek, který je stažen omotávkou. Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Omotávka zabraňuje penetraci matrice do svazku, a proto je v kontaktu s matricí především okrajová vrstva vláken.



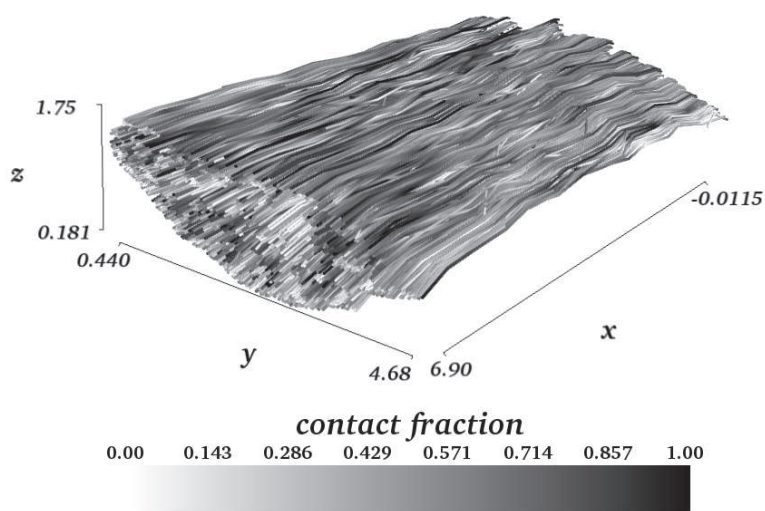
Obr. A.9: Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.



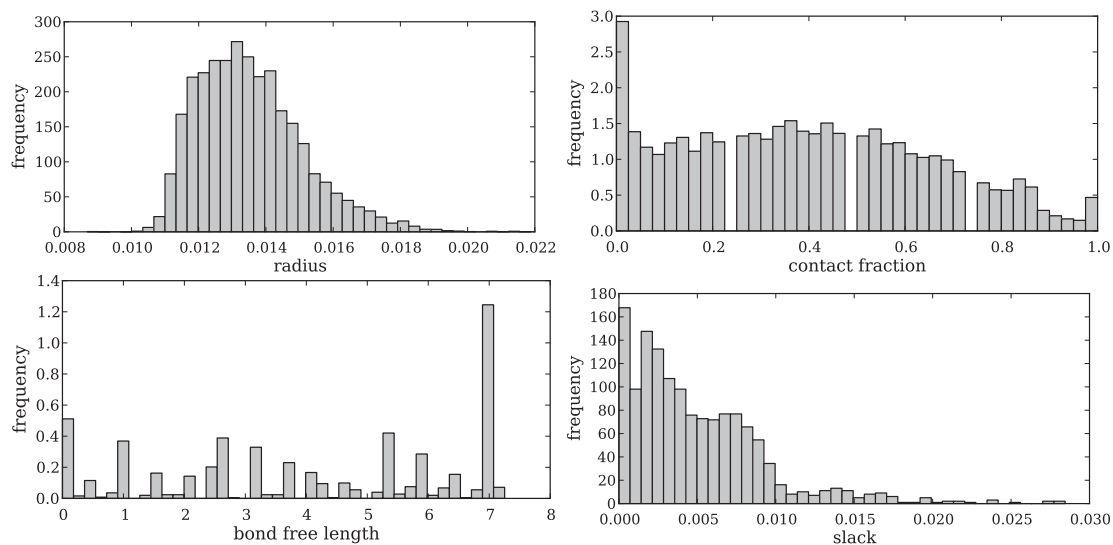
Obr. A.10: Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.

A.1.2 Vláknó VET 1

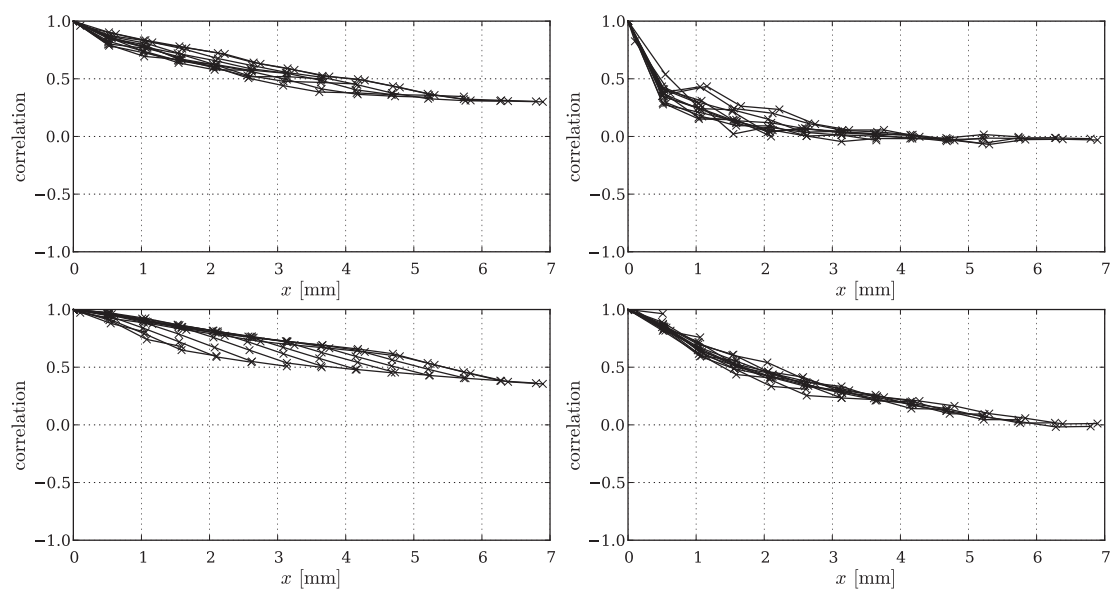
Celkem bylo naidentifikováno 1752 segmentů vláken. Z tohoto počtu je 1228 průběžných. Počet průběžných vláken, které je možné seskládat ze všech segmentů, je 1467.



Obr. A.11: 3D model svazku vláken. Plochý svazek vláken, jehož vlákna jsou rozvolněna (provzdušněna). Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Rozvolnění svazku umožňuje lepší penetraci matrice do svazku.



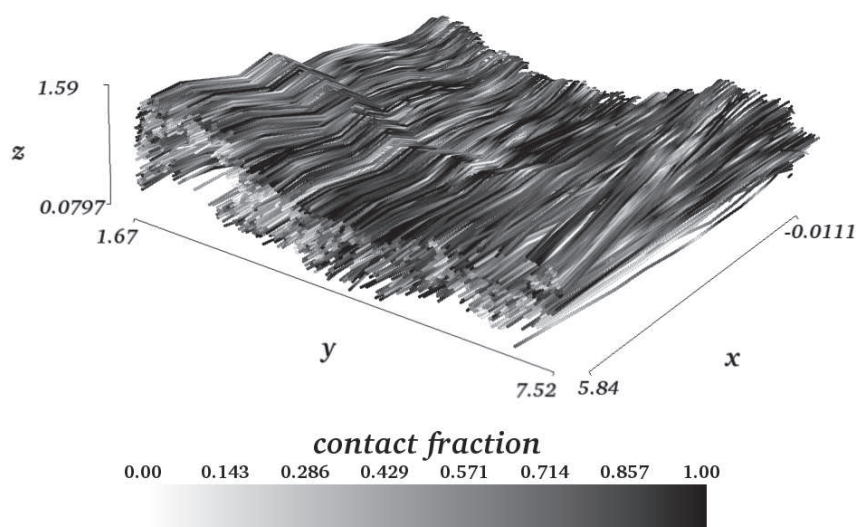
Obr. A.12: Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.



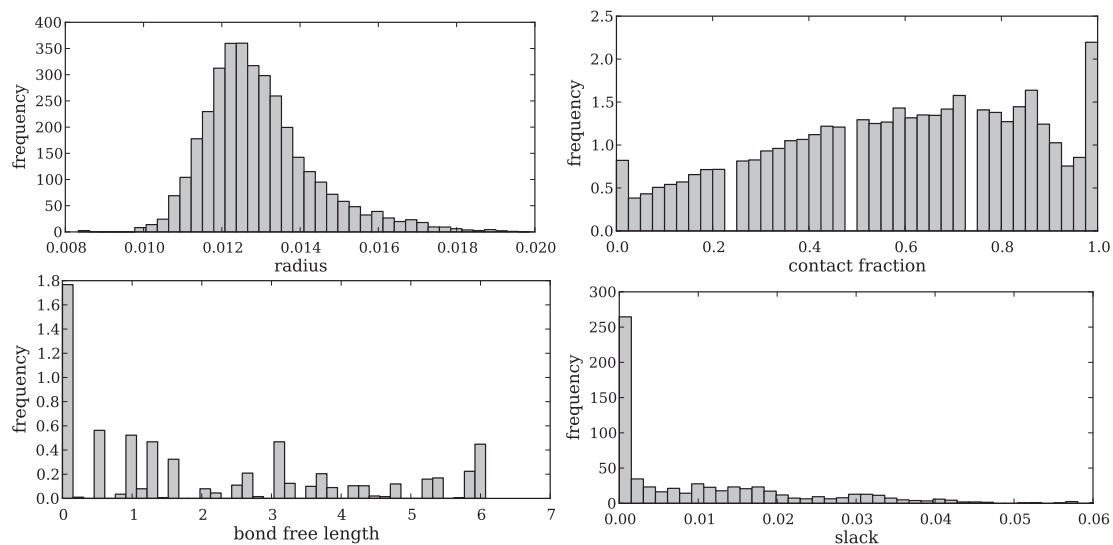
Obr. A.13: Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.

A.1.3 Vláknó VET 2

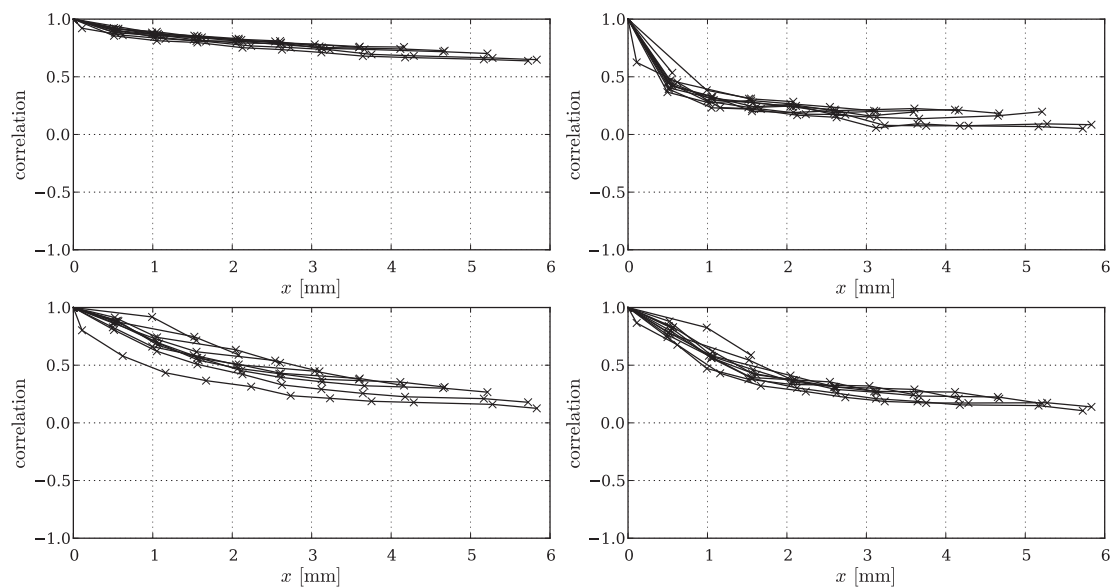
Celkem bylo naidentifikováno 1485 segmentů vláken. Z tohoto počtu je 1271 průběžných. Počet průběžných vláken, které je možné seskládat ze všech segmentů, je 1364.



Obr. A.14: 3D model svazku vláken. Obdélníkový svazek vláken, jehož vlákna jsou rozvolněna. Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Rozvolnění svazku umožňuje lepší penetraci matrice do svazku.



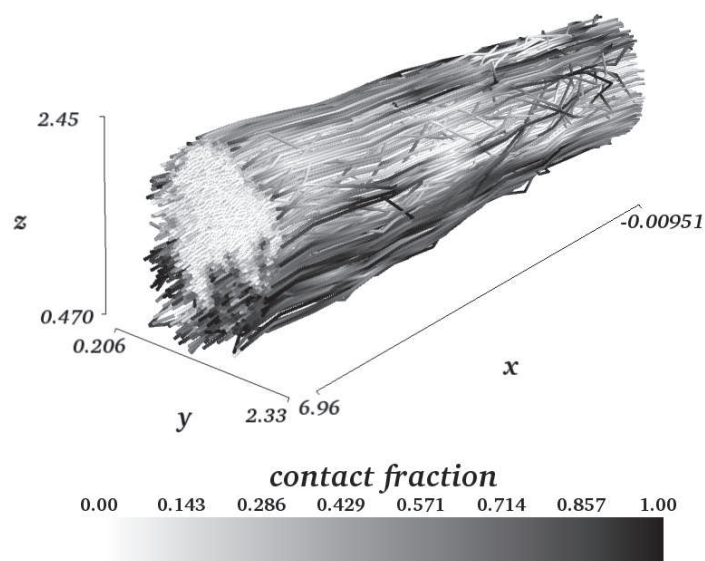
Obr. A.15: Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.



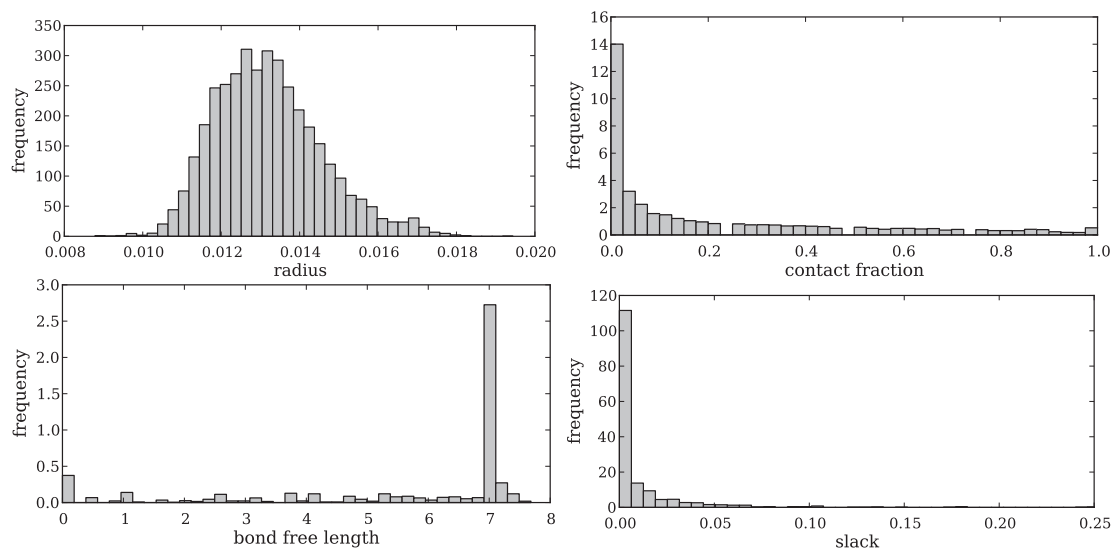
Obr. A.16: Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.

A.1.4 Vlákno VET 3

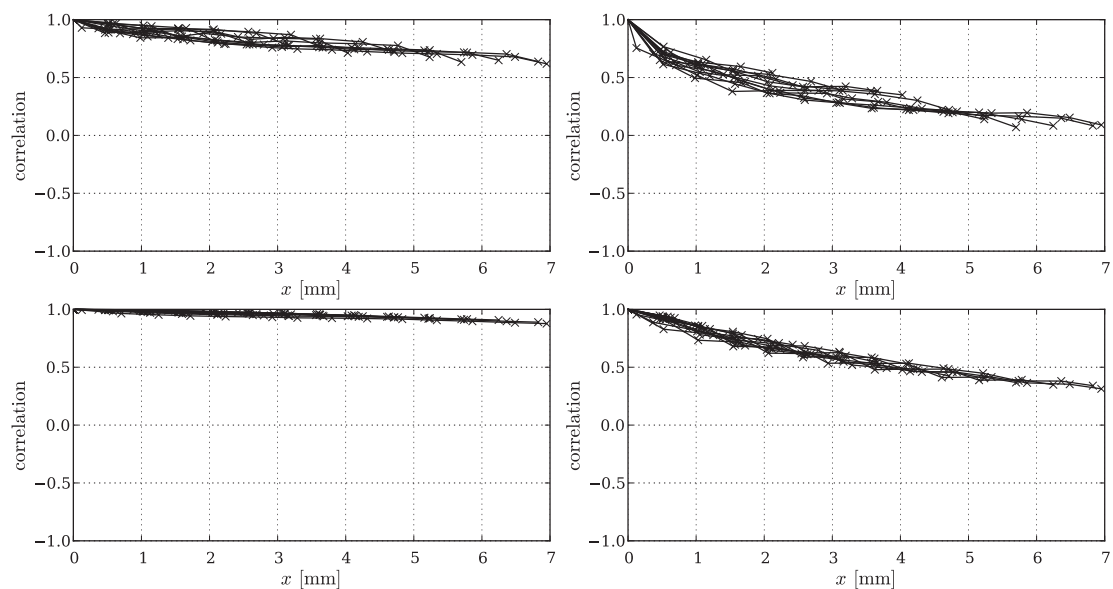
Celkem bylo naidentifikováno 1426 segmentů vláken. Z tohoto počtu je 1374 průběžných. Počet průběžných vláken, které je možné seskládat ze všech segmentů, je 1417.



Obr. A.17: 3D model svazku vláken. Kruhový svazek vláken, jehož vlákna jsou stažena omotávkou. Černobílá škála ukazuje míru kontaktu s matricí. Omotávka svazku zabraňuje penetraci matrice do svazku.



Obr. A.18: Histogramy – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.



Obr. A.19: Autokorelační délky – poloměr, míra kontaktu s matricí, volná délka a relativní prodloužení vlákna před jeho aktivací.

ZDE VLOŽIT LIST ZIVOTOPISU

Z důvodu správného číslování stránek

ZDE VLOŽIT LIST ZIVOTOPISU

Z důvodu správného číslování stránek

VLASTNÍ PUBLIKOVANÉ PRÁCE

Články v časopise

- [51] M. Vořechovský and V. Sadílek. Probabilistic determination of the number of fibers bridging a crack in short fiber reinforced composites. *BAM – Bulletin of Applied Mechanics*, 7(25):21–25, 2011. ISSN 1801-1217.
- [52] M. Vořechovský and Václav Sadílek. Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension. *International Journal of Fracture*, 154(1-2):27–49, 2008. ISSN 0376-9429. doi:[10.1007/s10704-009-9316-9](https://doi.org/10.1007/s10704-009-9316-9). [IF = 1.147].
- [53] R. Chudoba, V. Sadílek, R. Rypl and M. Vořechovský: Using Python for scientific computing: an efficient and flexible evaluation of the statistical parameters of functions with multivariate random inputs. *Journal of Computer Physics Communications*, [IF = 2.300], v posouzení

Články na zahraniční konferenci

- [54] R. Chudoba, I. Focke, B-G. Kang, and V. Sadílek. Abbildung der verbundstruktur aus rem-aufnahmen im geometrischen 3d modell als basis für die modellierung des trc-verbundverhaltens auf der mikroebene. In Manfred Curbach and Regine Ortlepp, editors, *6. Kolloquium zu textilbewehrten Tragwerken – 6th Colloquium on Textile Reinforced Structures (CTRS6)*, pages 61–72, Berlin, Germany, 2011. Bundesanstalt für Materialprüfung (BAM), Technische Universität Dresden. ISBN 978-3-86780-245-1.
- [55] R. Chudoba, I. Focke, B-G. Kang, V. Sadílek, and M. Vořechovský. Reproduction of the 3d bond microstructure from sem micrographs as a basis for the modeling of the representative behavior of a crack bridge in trc. In et al Filho, editor, *2nd International RILEM Conference on Strain Hardening Cementitious Composites*, pages 355–362, Rio de Janeiro, Brazil, 2011. RILEM, RILEM Publications S.A.R.L. Bagneux, France. ISBN 978-2-35158-120-9.
- [56] V. Sadílek and M. Vořechovský. Size effects in concrete specimens under uniaxial tension: Computational modeling. In Gregor Fisher, Mette Geiker, Ole Heddal, Lisbeth Ottosen, and Henrik Stang, editors, *8th fib International PhD*

Symposium in Civil Engineering, volume 640, pages 147–151, Technical University of Denmark, June 2010. Department of Civil Engineering, Technical University of Denmark, DTU Byg. ISBN 978-87-78773-01-2.

- [57] M. Vořechovský and V. Sadílek. Computational modeling of size effects in concrete specimens under uniaxial tension (interplay of statistical, energetic and weak boundary size effects studied via stochastic fracture mechanics). In J. van Mier, editor, *Physical Aspects of Fracture Scaling and Size Effects, held in Monte Verità, Switzerland*. ETH Zurich, Institute for Building Materials (IfB) and CEA Saclay, ETH Zurich, March 2008.
- [58] M. Vořechovský, V. Sadílek, R. Rypl, and J. Hegger. Probabilistic modeling of short fiber reinforced composites: asymptotic evaluation of a crack bridge performance. In Andrzej Winnicki and Szymon Serega, editors, *7th International Conference Analytical Models and New Concepts in Concrete and Masonry Structures 2011, held in Kraków, Poland*, pages 311–312, Kraków, Poland, 2011. Concrete Structures Section at the Committee on Civil Engineering and Hydro-engineering of the Polish Academy of sciences. ISBN 978-83-7242-603-1.
- [59] M. Vořechovský, V. Sadílek, R. Rypl, and R. Chudoba. Probabilistic modeling of the crack bridge performance in short fiber reinforced composites. In Abdel-Monem El-Batahgy and Mohamed Waly, editors, *1st Interquadrennial ICF Conference in Middle East and Africa – Processing, Performance and Failure of Engineering Materials*, pages 237–245, Luxor, Egypt, Nov 14-17, 2011.

Články na lokální konferenci

- [60] O. Kika, O. Kratochvíl, J. Křižan, V. Sadílek, and L. Řoutil. Numerická analýza průběhu porušení betonového trámce za ohybu: Část II. In *Juniorstav 2008*, Brno, 2008. VUT Brno, Fakulta stavební, VUT Brno, Fakulta stavební. ISBN 978-80-86433-45-5.
- [61] V. Sadílek. Studie vybraných materiálových parametrů v programu Atena. In *Juniorstav 2009*, page 219, Brno, 2009. VUT Brno, Fakulta stavební, VUT Brno, Fakulta stavební. ISBN 978-80-214-3810-1.
- [62] V. Sadílek, M. Vořechovský, and J. Doležel. Řešené úlohy z oblasti spolehlivosti stavebních konstrukcí. In *Juniorstav 2011*, volume 420, page 229, Brno, 2011.

VUT Brno, Fakulta stavební, VUT Brno, Fakulta stavební. ISBN 978-80-214-4232-0.

- [63] M. Vořechovský and V. Sadílek. Role of selected parameters of material models for concrete in Atena program. In Jaroslava Ledererová, Josef Knězek, and Miroslav Svoboda, editors, *Ecology and new building materials and products, XIII. International Conference of Research institute of Building Materials, held in Telč, Czech Republic*, pages 262–265, full papers on CD-ROM, Telč, Czech Republic, 2009. Research Institute of Building Materials, Research Institute of Building Materials. ISBN 978-80-254-4447-4.
- [64] M. Vořechovský and V. Sadílek. Možnosti modelování trámů se zářezem v programu Atena a jejich porovnání z hlediska podchycení vlivu velikosti. In Ivo Dlouhý, editor, *Materials Design and Failures, workshop held in Brno, Czech Republic*, Brittle Fracture, pages 213–220, Brno, Czech Republic, 2010. Ústav fyziky materiálů AVČR, v.v.i., Ústav fyziky materiálů AVČR, v.v.i. ISBN 978-80-87434-01-7.
- [65] M. Vořechovský and V. Sadílek. Probabilistic determination of number of fibers bridging a crack in short fiber reinforced composites. In *Mechanika kompozitních materiálů a konstrukcí, held in Prague, Czech Republic*, Prague, Czech Republic, 2011. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní and Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd and Česká společnost pro mechaniku.
- [66] M. Vořechovský and V. Sadílek. Náhodný počet vláken protínajících rovinu trhliny ve vláknobetonu. In Jaroslava Ledererová, Miroslav Svoboda, and Jindra Drotterová, editors, *Ecology and new building materials and products, XV. International Conference of Research institute of Building Materials, held in Telč, Czech Republic*, pages 233–236, full papers on CD-ROM, Telč, Czech Republic, 2011. Research Institute of Building Materials, Research Institute of Building Materials. ISBN 978-80-87397-06-0.
- [67] M. Vořechovský, V. Sadílek, and F. Černík. Porovnání variant modelů nosníku se zářezem z hlediska podchycení vlivu velikosti. In Jaroslava Ledererová, Josef Knězek, and Miroslav Svoboda, editors, *Ecology and new building materials and products, XIV. International Conference of Research institute of Building*

Materials, held in Telč, Czech Republic, volume 368, pages 324–327, full papers on CD-ROM, Telč, Czech Republic, 2010. Research Institute of Building Materials, Research Institute of Building Materials. ISBN 978-80-87397-02-2.

- [68] M. Vořechovský, V. Sadílek, and R. Rypl. Probabilistic evaluation of a crack bridge performance in fiber reinforced composites. In Luboš Náhlík, Michal Zouhar, Martin Ševčík, Stanislav Seitzl, and Zdeněk Majer, editors, *Applied Mechanics 2011, held in Velké Bílovice, Czech Republic*, pages 243–246, Velké Bílovice, Czech Republic, 2011. Ústav fyziky materiálů AV ČR, Ústav fyziky materiálů AV ČR. ISBN 978-80-87434-03-1.

Diplomová práce

- [69] V. Sadílek. Modelování statisticko-energetického vlivu velikosti betonových konstrukcí pomocí výpočtové mechaniky (Modeling statistical-energetic size effect in concrete structures using computational mechanics), 2008. in Czech.